# Analyse mathématique I

## Examen (10 janvier 2003) **Correction**

---

Question 1. *Étudiez la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par :*

$$x_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}.$$

*Justifiez en détail. Toute affirmation non vue au cours doit être démontrée.*

(a) Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$y_n := \sqrt{1-\frac{1}{n}} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{n}} =: z_n \tag{1}$$

(b) Étude de la convergence de $(z_n)$. Vu que, pout tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a $1+1/n > 1$ et que, si $x > 1$, alors $1 < \sqrt{x} < x$, on déduit que

$$1 < z_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n}.$$

Puisque $1+1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, le théorème de convergence dominée implique que $z_n \to 1$.

(c) Le même raisonnement montre que $y_n \to 1$. La convergence dominée et (1) impliquent alors que $x_n \to 1$.

Question 2. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2. Montrez, en utilisant la définition en termes de $\varepsilon$, que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$y_n := -2x_n + 3$$

*converge vers* $-1$.

On doit prouver que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad |y_n + 1| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ de manière arbitraire. Existe-t-il un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |y_n + 1| \leqslant \varepsilon$ ? Nous savons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2, c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon' > 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0', \quad |x_n - 2| \leqslant \varepsilon'.$$

Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2$. L'hypothèse précédente implique qu'il existe un $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0',\ |x_n - 2| \leqslant \varepsilon/2$ ou encore, $\forall n \geqslant n_0',\ 2|x_n - 2| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant n_0', \quad |y_n + 1| = |-2x_n + 4| = 2|x_n - 2| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit donc de prendre $n_0 = n_0'$.

Question 3. *Étudiez la convergence de la suite* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par*

$$v_1 = 2, \qquad v_{n+1} = 3 - \frac{1}{v_n} \quad \text{si } n \geqslant 1.$$

*Calculez sa limite, si elle existe.*

(a) Montrons dans un premier temps que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad v_n \geqslant 1. \tag{2}$$

Faisons-le par récurrence sur $n$ :

- si $n = 1$, $v_1 = 2 \geqslant 1$ ;
- si $v_n \geqslant 1$ alors $v_{n+1} \geqslant 1$ — en effet, $v_{n+1} = 3 - 1/v_n \geqslant 3 - 1 \geqslant 1$.

(b) Prouvons à présent que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée. Soit $n \geqslant 1$.

$$v_{n+1} \geqslant v_n \quad \Leftrightarrow \quad 3 - \frac{1}{v_n} \geqslant v_n \quad \Leftrightarrow \quad v_n^2 - 3v_n + 1 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

où la dernière équivalence résulte du fait que le coefficient de $v^2$ du polynôme $v^2 - 3v + 1$ est strictement positif et donc que ce polynôme est négatif pour les $v$ se situant entre les deux racines. Comme $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant 1$, (2) implique que

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant 1 \leqslant v_n$$

Il reste à montrer

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

Ce qui établira aussi que $(v_n)$ est majorée. Montrons (3) par récurrence sur $n$.

- Si $n = 1$, $v_1 = 2 \leqslant (3+\sqrt{5})/2$.
- Si $v_n \leqslant (3+\sqrt{5})/2$, alors $v_{n+1} \leqslant (3+\sqrt{5})/2$. Comme $v_{n+1} = 3 - 1/v_n$, l'hypothèse implique que
$$v_{n+1} = 3 - \frac{1}{v_n} \leqslant 3 - \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{9+3\sqrt{5}-2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

(c) Puisque la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée, elle est convergente (vu au cours). Notons sa limite $v$. Vu (2), on obtient en passant à la limite que $v \geqslant 1$. En particulier $v \neq 0$. Dès lors, des règles usuelles sur les limites et de $v_{n+1} = 3 - 1/v_n$, on déduit que

$$v = 3 - \frac{1}{v},$$

c'est-à-dire $v = (3+\sqrt{5})/2$ ou $v = (3-\sqrt{5})/2$. Or, comme $v \geqslant 1 > (3-\sqrt{5})/2$, on a forcément que $v = (3+\sqrt{5})/2$.

Question 4. *Soit l'ensemble*

$$E := \left\{2 - \frac{3^n}{(n+1)!} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

*Calculez, s'ils existent,* $\inf E$, $\min E$, $\sup E$, $\max E$. *Toutes vos réponses doivent être justifiées.*

(a) Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n/(n+1)! \geqslant 0$. Par conséquent, 2 est un majorant de $E$. De plus, en posant $x_n = 2 - 3^n/(n+1)!$, nous savons que

$$\forall n,\ x_n \in E \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 2$$

et nous pouvons donc conclure que 2 est le suprémum de $E$ (c'est un majorant dans l'adhérence de $E$).

(b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n/(n+1)! \neq 0$, $2 \notin E$. C'est-à-dire que $\sup E \notin E$ et donc $E$ n'admet pas de maximum.

(c) Avec les notations ci-dessus, $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une suite croissante. En effet, $x_{n+1} \geqslant x_n$ ssi $2 - 3^{n+1}/(n+2)! \geqslant 2 - 3^n/(n+1)!$ ssi $3^{n+1}/(n+2)! \leqslant 3^n/(n+1)!$ ssi $3/(n+2) \leqslant 1$ ssi $n \geqslant 1$. Ainsi $x_1$ est plus petit ou égal à tous le éléments $x_n$ de $E$ sauf peut-être $x_0$. Dès lors, $\min\{x_0, x_1\} \in E$ minore $E$, ce qui signifie que c'est le minimum de $E$. Le minimum existe donc et

$$\inf E = \min E = \min\{x_0, x_1\} = \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$

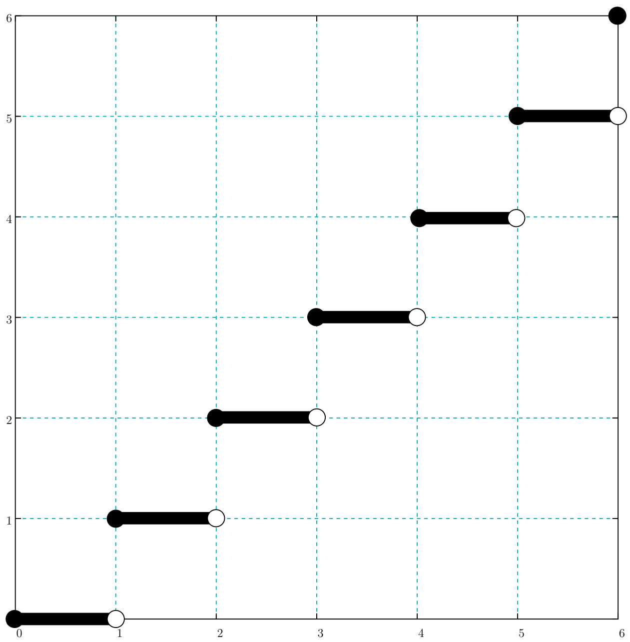
Question 5. *Notons $E$ la fonction définie par*

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

- *Calculez* $E(2{,}34)$, $E(9/2)$, $E(0{,}18)$ *et* $E(4)$.

$$E(2{,}34) = 2, \quad E(9/2) = E(4{,}5) = 4, \quad E(0{,}18) = 0 \quad \text{et} \quad E(4) = 4.$$

- *Représentez la fonction $E$ sur l'intervalle* $[0,6]$.



- *Définissez, de deux manières équivalentes, le fait que* $\lim_{x\to a} f(x) = b$.
  - ➯ quelle que soit la suite $(x_n)_{n\in I} \subseteq \mathbb{R}$, si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$.
  - ➯ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-b| \leqslant \varepsilon$
- *Montrez que* $\lim_{x\to 2} E(x)$ *n'existe pas.* Pour montrer que $\lim_{x\to 2} E(x)$ n'existe pas, il *suffit* de trouver deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ et $\big(E(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(E(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soient des suites qui convergent vers de limites différentes. Posons

$$x_n := 2 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad y_n := 2 + \frac{1}{n+2}.$$

  Nous savons que $x_n \to 2$ et $y_n \to 2$. De plus, vu que $1 \leqslant x_n < 2$, $E(x_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et, de $2 \leqslant y_n < 3$, on tire que $E(y_n) = 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$. En conclusion, $\lim_{x\to 2} E(x)$ n'existe pas.

Question 6. *Écrivez avec des quantificateurs les propriétés suivantes. (Il ne doit plus rester un seul mot de français.)*

- *l'ensemble* $A \subseteq \mathbb{R}$ *n'est pas borné supérieurement :*

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x > R$$

- $(x_n)_{n\in I}$ *ne converge pas :*

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \wedge |x_n - a| > \varepsilon$$

- $(x_n)_{n\in I}$ *converge vers* $-\infty$ *:*

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \leqslant R$$

- $(x_n)_{n\in I}$ *n'est pas bornée :*

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists n \in I,\ |x_n| > R$$

- $(x_n)_{n\in I}$ *est constante pour n assez grand :*

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in I,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n = c$$

- *La fonction* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est strictement croissante :*

$$\forall m,n \in \mathbb{N},\ m < n \Rightarrow \varphi(m) < \varphi(n)$$

- $a \in \mathbb{R}$ *est le suprémum de* $A \subseteq \mathbb{R}$ *:*

$$\big(\forall x \in A,\ x \leqslant a\big) \wedge \big(\forall a' \in \mathbb{R},\ (\forall x \in A,\ x \leqslant a') \Rightarrow a \leqslant a'\big)$$

- *La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue :*

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Question 7. *Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.*

☞ Les réponses suivantes sont tirées de copies d'étudiants.

*Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Le maximum d'un ensemble fini existe toujours.*

L'ensemble vide est un ensemble fini (0 élément) et il n'a pas de maximum.

Vrai : ☐ Faux : ☑ *Toute suite de rationnels converge dans* $\mathbb{R}$.

La suite $(x_n)$ définie par $x_n = (-1)^n$ n'est composée que de rationnels (1 et $-1 \in \mathbb{Q}$) et pourtant elle ne converge pas (car deux sous-suites ont des limites différentes).

Vrai : ☑ Faux : ☐ *Si une suite est croissante, alors elle converge au sens large.*

On sait que si une suite est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel (théorème vu au cours) et si une suite est croissante et non majorée elle converge vers $+\infty$ (théorème vu au cours). Donc on a bien que toute suite croissante converge au sens large.

Vrai : ☑ Faux : ☐ *Un ensemble* $A \subseteq \mathbb{R}$ *est borné si et seulement si il est borné supérieurement et inférieurement.*

Si $A$ est borné, alors il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A,\ -M \leqslant a \leqslant M$. On peut donc prendre $M$ comme borne supérieure et $-M$ comme borne inférieure.

Si maintenant $A$ admet $B_{\text{sup}}$ comme borne supérieure et $B_{\text{inf}}$ comme borne inférieure, alors $\forall a \in A,\ B_{\text{inf}} \leqslant a \leqslant B_{\text{sup}}$. En prenant $M := \max\{|B_{\text{inf}}|, |B_{\text{sup}}|\}$, on a $\forall a \in A,\ -M \leqslant a \leqslant M$ ce qui prouve que $A$ est borné.

Vrai : ☑ Faux : ☐ *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *converge, alors elle est telle que* $|x_n - x_{n+1}| \to 0$.

Si on prend la définition d'une suite de Cauchy, on a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant n_0,\ |x_m - x_n| \leqslant \varepsilon$. En particulier, avec $m = n+1$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon.$$

Par ailleurs, $|x_{n+1} - x_n| \to 0$ signifie que

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists n_1,\ \forall n \geqslant n_1,\ \big||x_{n+1} - x_n| - 0\big| \leqslant \varepsilon_1.$$

Prenons $\varepsilon = \varepsilon_1$ et $n_1 = n_0$. On voit que les deux définitions sont identiques.

Vrai : ☑ Faux : ☐ *Il est possible que le suprémum d'un ensemble A appartienne à A.*

Prenons $A := [0,1]$ ; $\sup A = 1 \in A$.

Vrai : ☑ Faux : ☐ *Toute suite convergente est bornée.*

Par définition de $x_n \to a$ avec $\varepsilon = 1$, on a $\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant 1$. Il suffit de prendre $R = \max\{|x_n| : n \geqslant n_0, 1 + |a|\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

➪ si $n \leqslant n_0$, on a $|x_n| \leqslant R$ ;

➪ si $n \geqslant n_0$, on a $\big||x_n| - |a|\big| \leqslant |x_n - a| \leqslant 1$ et donc $|x_n| \leqslant 1 + |a| \leqslant R$, c'est-à-dire $|x_n| \leqslant R$.

Donc $(x_n)$ est bornée si $(x_n)$ converge.

Vrai : ☐ Faux : ☑ *Toute suite bornée est convergente.*

La suite $(x_n)$ définie par

$$\begin{cases} x_{2n} = 3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 3 \\ x_{2n+1} = 5 \xrightarrow[n\to\infty]{} 5 \end{cases}$$

est bornée par 5 mais diverge.

Vrai : ☐ Faux : ☑ *La somme $f+g$ de deux fonctions non-continues $f$ et $g$ est discontinue.*

Par exemple, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ sont des fonctions discontinues et pourtant leur somme qui vaut 0 pour tout $x$ est continue.

AUTRE RÉPONSE POSSIBLE.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 3 \\ 1 & \text{si } x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \left\{\begin{matrix} 1+0 & \text{si } x > 3 \\ 0+1 & \text{si } x \leqslant 3 \end{matrix}\right\} = 1 \text{ est continue.}$$

Vrai : ☐ Faux : ☑ *La somme $f+g$ d'une fonction continue $f$ et d'une fonction discontinue $g$ est nécessairement discontinue.*

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 2$ si $x \in [0, +\infty[$ ; $f$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $g$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in\, ]-\infty, 0[ \\ 3 & \text{si } x \in [0, +\infty[ \end{cases}$$

$g$ n'est pas continue en 0. Pourtant $(f+g)(x) = 5$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ est une fonction continue.

REMARQUE. Lorsque les fonctions $f$ et $g$ ont même domaine (ou plus généralement si $\operatorname{Dom} f \supset \operatorname{Dom} g$), ceci est vrai car, si $f+g$ était continue, alors $g = (f+g) - f$ serait continue comme différence de deux fonctions continues.

Question 8. *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues d'un intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Prouvez que si $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$, alors il existe un $\xi \in ]a,b[$ tel que $f(\xi) = g(\xi)$. Énoncez tous les résultats du cours que vous utilisez.*

**Théorème des valeurs intermédiaires** (vu au cours). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe un $\xi \in ]a,b[$ tel que $f(\xi) = 0$.

**Preuve demandée.** Posons $h = f - g$. Comme $f$ et $g$ sont continues sur $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $h$ l'est aussi. De plus, au vu des hypothèses,

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \qquad \text{et} \qquad h(b) = f(b) - g(b) > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\xi \in [a,b]$ tel que $h(\xi) = 0$. Donc, $f(\xi) - g(\xi) = 0$ et la thèse est prouvée.

Question 9. *Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite de nombres réels. Considérons les trois propositions suivantes*

$$(x_n) \textit{ converge : } \exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

$$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall \zeta \geqslant 0,\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0,\ |x_m - b| \leqslant \zeta \tag{5}$$

$$(x_n) \textit{ est ultimement constante : } \exists c \in \mathbb{R},\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ x_p = c \tag{6}$$

*Prouvez que* $(4) \Leftarrow (5) \Leftrightarrow (6)$. *Trouvez un contre exemple qui montre que* $(4) \not\Rightarrow (5)$

(5)$\Rightarrow$(6). Montrer (6) revient à fournir $c$ tel que $\exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ x_p = c$. Prenons $c = b$. Nous obtenons de l'hypothèse (5) que

$$\forall \zeta \geqslant 0,\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0, \quad |x_m - c| \leqslant \zeta.$$

En particulier, en prenant $\zeta = 0$, on trouve

$$\exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0, \quad |x_m - c| \leqslant 0.$$

Il suffit donc de poser $p_0 = m_0$ puisque $|x_m - c| \leqslant 0$ est équivalent à $x_m = c$.

(6)$\Rightarrow$(5). Nous supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (6) et il faut montrer qu'elle satisfait (5). Posons $b = c$. Soit $\zeta \geqslant 0$. Prenons pour $m_0$ le $p_0$ de (6). De (6), il découle que

$$\forall m \geqslant m_0 = p_0, \quad x_m = c = b$$

D'où $\forall m \geqslant m_0,\ |x_m - b| = 0 \leqslant \zeta$ ce qui signifie que (5) est vraie.

(5)$\Rightarrow$(4). Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (4). Posons $a = b$ et fixons un $\varepsilon > 0$ arbitraire. En utilisant (5) avec $\zeta = \varepsilon$, on obtient

$$\exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0, \quad |x_m - b| \leqslant \zeta$$

et donc, en prenant pour $n_0$ ce $m_0$, on voit que (4) est vérifiée.

(4)$\not\Rightarrow$(5). Soit la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $x_n := 1/n$. Celle-ci converge vers 0 ; elle vérifie donc (4). Cependant elle n'est pas ultimement constante (car si elle l'était, on aurait un $c \in \mathbb{R}$ et un $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $1/p_0 = x_{p_0} = c = x_{p_0+1} = 1/(p_0+1)$ ce qui est manifestement faux), donc elle ne satisfait pas (6). Or $(5) \Leftrightarrow (6)$, donc cette suite ne vérifie pas (5).

Question 10. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$x_n := \left(\frac{1}{\lambda - 1}\right)^n.$$

*Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle et quelle est alors sa limite ? Justifiez en détail.*

**Rappel :** La convergence d'une suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du type $x_n = r^n$ où $r \in \mathbb{R}$ dépend de la valeur de sa raison $r$ :

- si $r \leqslant -1$ alors $(x_n)$ diverge ;
- si $r \in \,]-1,1[$, c'est-à-dire si $|r| < 1$, alors $(x_n)$ converge vers $0$ ;
- si $r = 1$, alors $(x_n)$ converge vers $1$ ;
- si $r > 1$, alors $(x_n)$ diverge (elle converge au sens large vers $+\infty$).

**Application à la question 10.** Pour la suite donnée à la question 10,

$$r = \frac{1}{\lambda - 1}$$

On a donc convergence si et seulement si $-1 < r \leqslant 1$, c'est-à-dire si

$$-1 < \frac{1}{\lambda - 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda - 1} \leqslant 1 \tag{7}$$

Deux cas se présentent :

- si $\lambda - 1 > 0$, on peut multiplier ces deux inégalités par $\lambda - 1$ sans changer leur orientation et (7) devient « $-\lambda + 1 < 1$ et $1 \leqslant \lambda - 1$ » ou encore « $0 < \lambda$ et $\lambda \geqslant 2$ », i.e., « $\lambda \geqslant 2$ » ;
- si $\lambda - 1 < 0$, on change l'orientation des inégalités en les multipliant par $\lambda - 1$ ce qui fait que (7) devient « $-\lambda + 1 > 1$ et $1 \geqslant \lambda - 1$ » ou encore « $\lambda < 0$ et $\lambda \leqslant 2$ », i.e., « $\lambda < 0$ ».

En rassemblant ces résultats, on trouve, que la condition nécessaire et suffisante de convergence (7) se réduit à

$$\lambda \in \,]-\infty, 0[\, \cup \, [2, +\infty[$$

De plus,

- si $-1 < r < 1$, c'es-à-dire si $\lambda \in \,]-\infty, 0[\, \cup \, ]2, +\infty[$, $x_n \to 0$ ;
- si $r = 1$ c'est-à-dire si $\lambda = 2$, $x_n \to 1$.