Analyse mathématique I

Examen

(5 juin 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Commencez par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Si vous avez les pages 12–16, cela signifie que vous représentez l'examen de janvier. Au cas où ce ne serait pas votre intention veuillez le signaler *immédiatement*.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les *explications* sont aussi (voire plus) importantes que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la longueur des réponses attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Étudiez la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(5\boldsymbol{i}-1)^k}{9^k(k+1)!} .$$

Analyse mathématique I

Examen (5 juin 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 en termes de petit o de la fonction

$$f(x) := \operatorname{ch}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+3x} - 1\Big).$$

(Rappel : par définition, $\operatorname{ch} x := (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})/2$.) Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x) - 1}{2\ln(1+x) - 2x}\,.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) := \mathrm{e}^y f(x^2 - y^2).$$

Montrez que

$$x\partial_y\varphi + y\partial_x\varphi = x\varphi \ .$$

Détaillez les étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_x^2 u + u = x\mathrm{e}^{3x} + \cos x$$

Calculez en toutes les solutions.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$. On définit l'*image réciproque* de A par f comme

$$f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}.$$

(a) Pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - x$, recherchez l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, 2])$. Cet ensemble est-il compact ? Justifiez votre réponse.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue quelconque. Montrez que l'ensemble $h^{-1}(]-\infty, a])$ est fermé.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite).

(c) Déduisez du point précédent que l'ensemble $h^{-1}\left(]a, +\infty[\right)$ est ouvert.

(d) Peut-on affirmer que l'ensemble $h^{-1}\left(]-\infty, a]\right)$ est toujours un compact ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions pour lesquelles on donne :

$$f(u,v) = \left(v^2 - u^2, (2u^3 - v)^2, -3u\right),$$

$$\partial g(0,1,-3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 2x - 5y + 4z.$$

- Calculez la matrice Jacobienne $\dfrac{\partial f}{\partial(u,v)}$ au point $(1,1)$.
- Calculez la matrice Jacobienne $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,z)}$ au point $(0,1,-3)$.
- Donnez la dérivée $\partial(g \circ f)$ au point $(1,1)$.

Analyse mathématique I

Examen (5 juin 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. On considère un miroir M d'équation $y = ax + b$. Un rayon lumineux se réfléchit sur ce miroir de telle manière que l'angle d'incidence α soit égal à l'angle de réflection β (voir figure 1). Si un rayon R d'équation $x = \gamma$ arrive verticalement sur M, alors le rayon réfléchi $\tilde{R}$ a pour équation

$$\tilde{R} \equiv y = a\gamma + b + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right)(x - \gamma). \tag{1}$$

De manière plus générale, un rayon se réfléchira sur un miroir quelconque en suivant la même loi à condition de mesurer les angles d'incidence et de réflection par rapport à la tangente au miroir au point de réflection, comme le montre la figure 2.

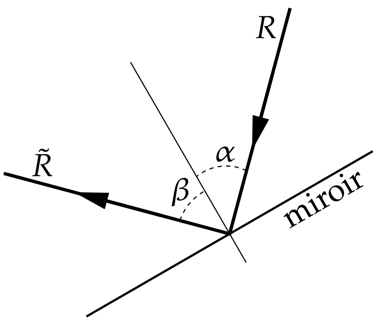

FIG. 1 – Miroir plan

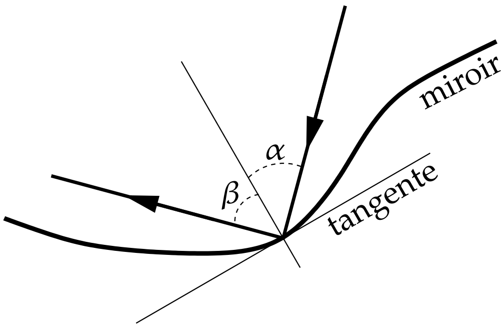

FIG. 2 – Miroir quelconque

À partir des considérations ci-dessus, montrez que les rayons lumineux arrivant sur un miroir parabolique parallèlement à son axe de symétrie passent tous après réflection par un même point (voir figure 3) et déterminez ce point (qui est appelé *foyer* du miroir).

Compléter le plan suivant avant de vous lancer dans les calculs peut vous être utile.

- Chercher l'équation générale du miroir.
- Prendre un rayon vertical d'équation $x = \gamma$.
-
-

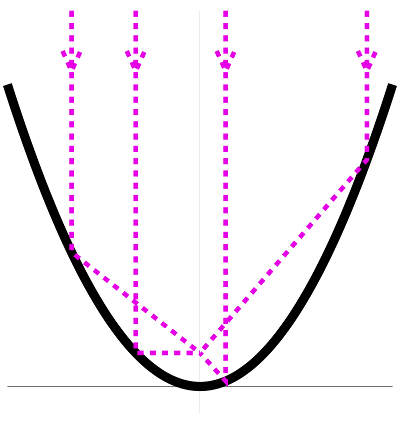

FIG. 3 – Miroir parabolique

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (5 juin 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

La suite concerne uniquement ceux qui représentent l'examen de janvier.

Question 8. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite bornée est de Cauchy.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Il est possible que le minimum et le maximum d'un ensemble A soient égaux.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors la suite $(-2003x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f et g sont deux fonctions continues, alors $g-f$ est une fonction continue.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite décroissante et minorée converge au sens large.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_n = \left(\frac{a}{5}\right)^n.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de a la suite converge-t-elle et quelle est alors sa limite ? Justifiez en détail votre réponse.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 10. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers les réels a et b. Montrez, en utilisant la définition en termes de ε que $2x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2a - b$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$.

Définissez, en termes de ε, δ la continuité de f au point a.

(b) Considérons la fonction

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \geqslant 1 \\ x + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

En utilisant la définition donnée au point précédent, montrez que la fonction g est continue en 2.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite).

(c) La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifiez en détail votre réponse.