Analyse mathématique I

Examen (14 août 2003)

Nom :
Prénom :
Section :

Commencez par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les *explications* sont aussi (voire plus) importantes que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la longueur des réponses attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Plaçons nous dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ muni de la norme 2, notée $|\cdot|_2$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Montrez que

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ |x|_2 < \varepsilon\big) \Rightarrow x = 0.$$

Détaillez toutes les étapes de votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t^2 v + 4v = t^2 e^{-t} + \sin(2t).$$

Calculez en toutes les solutions.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x=0$ en termes de petit o de la fonction

$$f(x) := \sin\left(\frac{e^{-x}}{1+x} - 1\right).$$

Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)+2x}{\operatorname{sh} x^2} .$$

(Rappel : par définition, $\operatorname{sh} x := (e^x - e^{-x})/2$.)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Considérons la fonction $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x f(x^2 y)$. Montrez que

$$x\gamma + 2y\,\partial_y\gamma = x\,\partial_x\gamma\,.$$

Détaillez les étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

(a) Donnez la définition en ε, δ de « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point a ».

Pour le reste de cette question, on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$.

(b) Montrez, à partir de la définition ci-dessus, que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite).

(c) En quels points $a \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle dérivable ? Justifiez aussi bien vos réponses positives que négatives.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite).

(d) En tout point $a \in \mathbb{R}$ où f est dérivable, donnez la valeur de $\partial f(a)$.

(e) La fonction dérivée $\partial f : \mathrm{Dom}(\partial f) \to \mathbb{R}$ est-elle continue ? Justifiez.

Question 6. Pour quelles valeurs de $a \in \left]0, +\infty\right[$ la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n$$

converge-t-elle ? Détaillez votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7.

(a) Donnez la définition de $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(b) Dans cette partie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites arbitraires de nombres réels telles que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers 0 pour un choix adéquat des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers un réel $a \in \mathbb{R}$ arbitraire pour un choix adéquat des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donnez un court argument — différent de « vu au cours » — pour chacune des propositions dont vous affirmez la véracité.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Rappelons que, par définition, un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est appelé *convexe* si, pour tout $x, y \in A$ et tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

(a) Pour x, y fixés, que représente l'ensemble $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$? Justifiez.

(b) Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$, montrez que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ est un ensemble convexe.

(c) Le cercle $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est-il convexe ? Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$.

(a) Définissez « A est un ensemble fermé ».

(b) Définissez « B est un ensemble séquentiellement compact ».

(c) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$.

- Complétez l'affirmation suivante :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ pour certains $\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \in \mathbb{R}$

tels que $\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \neq 0$.

- D est-il un ensemble fermé ? Justifiez.

- D est-il un ensemble séquentiellement compact ? Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9 (suite).

(d) Si A est fermé et B est compact, montrez que $A+B := \{z \in \mathbb{R}^N : \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x+y\}$ est fermé.

(e) Afin d'établir que la simple fermeture de A et B n'est pas suffisante dans (d), prouvez que $(0,0) \in \operatorname{adh}(A+B)$ et $(0,0) \notin A+B$ où $A := \{(x, 1/x) : x > 0\}$ et $B := \{(x, -1/x) : x > 0\}$.