Analyse mathématique I

Examen (14 août 2003)

Correction

Question 1. *Plaçons nous dans le plan cartésien* $\mathbb{R}^2$ *muni de la norme* 2, *notée* $|\cdot|_2$. *Soit* $x \in \mathbb{R}^2$. *Montrez que*

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ |x|_2 < \varepsilon\big) \Rightarrow x = 0.$$

Détaillez toutes les étapes de votre raisonnement.

Procédons par l'absurde et supposons que $x \neq 0 \wedge \forall \varepsilon > 0,\ |x|_2 < \varepsilon$. Puisque $x \neq 0$, on a $|x|_2 > 0$ et donc, en prenant $\varepsilon = |x|_2$, on obtient $|x|_2 < |x|_2$ ce qui est absurde.

Question 2. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\partial_t^2 v + 4v = t^2 \mathrm{e}^{-t} + \sin(2t).$$

Calculez en toutes les solutions.

(a) SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE $p(\partial)u = 0$.

L'équation s'écrit sous la forme $p(\partial)u = 0$ avec $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Les racines du polynôme caractéristique p sont $\lambda_\pm = \pm 2\boldsymbol{i}$. Par conséquent, la solution générale (complexe) est donnée par

$$u_{\mathrm{H}}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2\boldsymbol{i}t} + C_2 \mathrm{e}^{-2\boldsymbol{i}t} \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

(b) SOLUTION PARTICULIÈRE DE L'ÉQUATION $p(\partial)u = t^2 \mathrm{e}^{-t}$.

Comme -1 n'est pas une racine du polynôme caractéristique, l'équation possède une solution particulière de la forme :

$$u_1(t) = (A + Bt + Ct^2)\mathrm{e}^{-t}$$

En remplaçant u par u_1 dans $p(\partial)u = t^2 \mathrm{e}^{-t}$, on trouve

$$\begin{cases} A = -2/125 \\ B = 4/25 \\ C = 1/5 \end{cases}$$

En conclusion,

$$u_1(t) = \Big(-\frac{2}{125} + \frac{4t}{25} + \frac{t^2}{5}\Big)\mathrm{e}^{-t}.$$

(c) Solution paticulière de l'équation $p(\partial)u = \sin(2t)$.

Les coefficients de p étant réels, il suffit de calculer une solution particulière u_{2C} de l'équation $p(\partial)u = e^{2\boldsymbol{i}t}$ et d'en prendre la partie imaginaire. Cette fois ci, il faut faire attention au fait que $2\boldsymbol{i}$ est une racine de multiplicité 1 du polynôme caractéristique. On sait donc qu'une solution particulière de la forme

$$u_{2C}(t) = Cte^{2\boldsymbol{i}t}$$

existe. En remplaçant u par u_{2C} dans l'équation $p(\partial)u = e^{2\boldsymbol{i}t}$, on obtient que $u_{2C}(t) = (-t\boldsymbol{i}/4)e^{2\boldsymbol{i}t}$. En en prenant la partie imaginaire, on obtient la solution particulière

$$u_2(t) = \frac{-t}{4}\cos(2t)$$

de l'équation $p(\partial)u = \sin(2t)$.

(d) Solution générale de l'équation non-homogène.

Par le principe de superposition, la solution générale est

$$\begin{aligned} u(t) &= u_H(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ &= C_1 e^{2\boldsymbol{i}t} + C_2 e^{-2\boldsymbol{i}t} + \Big(-\frac{2}{125} + \frac{4t}{25} + \frac{t^2}{5}\Big) - \frac{t}{4}\cos(2t) \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Question 3. *Donnez le développement de Taylor d'ordre* 3 *en* $x = 0$ *en termes de petit* o *de la fonction*

$$f(x) := \sin\Big(\frac{e^{-x}}{1+x} - 1\Big).$$

Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x) + 2x}{\operatorname{sh} x^2}\ .$$

(Rappel : par définition, $\operatorname{sh} x := (e^x - e^{-x})/2$*.)*

- On a vu au cours les développements de Taylor suivants :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

En les multipliant et en soustrayant 1, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{1+x} - 1 &= \Big(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)\Big(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\Big) - 1 \\ &= -2x + \frac{5x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned} \tag{1}$$

où tous les termes en x^4, x^5, x^6, $x \cdot \mathrm{o}(x^3)$,... ont été omis car ils sont tous des $\mathrm{o}(x^3)$ (et une somme de $\mathrm{o}(x^3)$ est un $\mathrm{o}(x^3)$). Par ailleurs, comme $\sin y = y - y^3/6 + \mathrm{o}(y^3)$ (vu au cours), on a en remplaçant y par (1) :

$$f(x) = \sin\Big(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x} - 1\Big) = -2x + \frac{5x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

▪ En soustrayant les développements de Taylor pour e^x et e^{-x} et en divisant par deux, on trouve que

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3).$$

et donc $\operatorname{sh}(x^2) = x^2 + \mathrm{o}(x^3)$. Par conséquent

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x)+2x}{\operatorname{sh} x^2} = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{\frac{5}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{x^2 + \mathrm{o}(x^3)} = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{\frac{5}{2} - \frac{4}{3}x + \mathrm{o}(x)}{1 + \mathrm{o}(x)} = \frac{5}{2}$$

Question 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Considérons la fonction $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x f(x^2 y)$. Montrez que*

$$x\gamma + 2y\,\partial_y\gamma = x\,\partial_x\gamma\,. \tag{2}$$

Détaillez les étapes de vos calculs.

Commençons par calculer les dérivées partielles de γ en fonction de ∂f en utilisant la règle de dérivation de produits et de fonctions composées :

$$\begin{aligned}\partial_x\gamma(x,y) &= \partial_x(\mathrm{e}^x) f(x^2y) + \mathrm{e}^x \partial f(x^2y)\partial_x(x^2y)\\ &= \mathrm{e}^x f(x^2y) + \mathrm{e}^x \partial f(x^2y) 2xy \qquad (3)\\ \partial_y\gamma(x,y) &= \mathrm{e}^x \partial f(x^2y)\partial_y(x^2y) = \mathrm{e}^x \partial f(x^2y) x^2 \qquad (4)\end{aligned}$$

En utilisant les égalités (3)–(4) dans (2), on trouve :

$$\begin{aligned}x\gamma + 2y\,\partial_y\gamma &= x\mathrm{e}^x f(x^2y) + 2y\mathrm{e}^x \partial f(x^2y)x^2\\ &= x\Big(\mathrm{e}^x f(x^2y) + \mathrm{e}^x \partial f(x^2y) 2xy\Big) = x\partial_x\gamma(x,y)\end{aligned}$$

ce qui montre que (2) est bien vérifiée.

Question 5.

(a) *Donnez la définition en ε, δ de « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point a ».*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f, \quad |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour le reste de cette question, on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$.

(b) *Montrez, à partir de la définition ci-dessus, que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que $\delta = \varepsilon$ convient. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| \leqslant \delta$. On a

$$\big||x| - |a|\big| \leqslant |x-a| \leqslant \delta = \varepsilon.$$

Ceci conclut la preuve de la continuité de f en un point a arbitraire.

(c) *En quels points $a \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle dérivable ? Justifiez aussi bien vos réponses positives que négatives.*

Rappelons que f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \text{ existe.}$$

et dans ce cas, $\partial f(a)$ vaut la valeur de cette limite.

- Si $a > 0$, il existe un voisinage V_a de a (par exemple $V_a =]a/2, 3a/2[$) tel que $\forall x \in V_a,\ x > 0$. Par conséquent

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V_a}} \frac{|x| - |a|}{x-a} = \lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \frac{x-a}{x-a} = 1$$

  et donc f est dérivable en a.

- Si $a < 0$, il existe un voisinage V_a de a (par exemple $V_a =]3a/2, a/2[$) tel que $\forall x \in V_a,\ x < 0$. Par conséquent

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V_a}} \frac{|x| - |a|}{x-a} = \lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \frac{-x+a}{x-a} = -1$$

  et donc f est dérivable en a.

- Si $a = 0$, les limites à gauche et à droite diffèrent :

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} \frac{x}{x} = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

  et donc f n'est pas dérivable en 0.

En conclusion, la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) *En tout point $a \in \mathbb{R}$ où f est dérivable, donnez la valeur de $\partial f(a)$.*

En vertu des calculs ci-dessus, on a

$$\partial f(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

(e) *La fonction dérivée $\partial f : \mathrm{Dom}(\partial f) \to \mathbb{R}$ est-elle continue ? Justifiez.*

Oui. Si $a > 0$, $\lim_{x \to a} \partial f(x) = 1 = \partial f(a)$ et, si $a < 0$, $\lim_{x \to a} \partial f(x) = -1 = \partial f(a)$ (les justifications à l'aide des voisinages sont les mêmes que ci-dessus). Ceci montre la continuité de ∂f en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathrm{Dom}(\partial f)$.

Question 6. *Pour quelles valeurs de $a \in]0,+\infty[$ la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, a^n$$

converge-t-elle ? Détaillez votre raisonnement.

Posons $x_n = na^n$, le terme général de cette série. On a

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \frac{n+1}{n}a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.$$

On en déduit que

- si $a < 1$, la série converge par le critère de d'Alembert ;
- si $a > 1$, la série diverge par le critère de d'Alembert ;
- si $a = 1$, la suite devient $\sum_{n=0}^{\infty} n$ qui diverge car le terme général ne tend pas vers zéro.

Question 7.

(a) *Donnez la définition de $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.*

$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad x_n \geqslant \rho.$$

(b) *Dans cette partie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites arbitraires de nombres réels telles que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate.*

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *peut converger vers* 0 *pour un choix adéquat des suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$.
Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *peut converger vers un réel $a \in \mathbb{R}$ arbitraire pour un choix adéquat des suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donnez un court argument — différent de « vu au cours » — pour chacune des propositions dont vous affirmez la véracité.

- $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

On doit prouver
$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad x_n + y_n \geqslant \rho \tag{5}$$
sous les hypothèses
$$\forall \rho_1 \in \mathbb{R},\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_1, \quad x_n \geqslant \rho_1 \tag{6}$$
$$\forall \rho_2 \in \mathbb{R},\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_2, \quad y_n \geqslant \rho_2 \tag{7}$$

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Par (6) et (7) avec respectivement $\rho_1 = \rho/2$ et $\rho_2 = \rho/2$, on sait qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que
$$\forall n \geqslant n_1, \quad x_n \geqslant \rho/2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_2, \quad y_n \geqslant \rho/2$$

Prenons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. On a bien que $\forall n \geqslant n_0$, $x_n + y_n \geqslant \rho/2 + \rho/2 = \rho$.

- *$(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers un réel $a \in \mathbb{R}$ arbitraire pour un choix adéquat des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Prenons $x_n = n + a$ et $y_n = n$. On prouve aisément que $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ et $x_n - y_n = a \to a$.

Question 8. *Rappelons que, par définition, un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est appelé* convexe *si, pour tout $x, y \in A$ et tout $\lambda \in [0,1]$,*
$$\lambda x + (1-\lambda) y \in A.$$

(a) *Pour x, y fixés, que représente l'ensemble $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$? Justifiez.*

C'est le segment de droite joignant les deux points x et y. En effet, on peut écrire $\lambda x + (1-\lambda)y$ comme $y + \lambda(x-y)$ ce qui montre bien qu'on part du point y ($\lambda = 0$) et qu'on y ajoute une fraction du vecteur $x - y$ jusqu'à arriver en x (en $\lambda = 1$).

(b) *Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$, montrez que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ est un ensemble convexe.*

Soient $x, y \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$, c'est-à-dire que $\|x\| < 1$ et $\|y\| < 1$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$. Cela résulte du calcul suivant qui exploite les propriétés d'homogénéité et de sous-additivité d'une norme :
$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| = |\lambda|\,\|x\| + |1-\lambda|\,\|y\| < \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

(c) *Le cercle $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est-il convexe ? Justifiez.*

Non. On peut en effet prendre les deux points opposés $(1,0) \in S$ et $(-1,0) \in S$ et le milieu du segment qu'ils délimitent n'appartient pas au cercle : $\frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(-1,0) = (0,0) \notin S$.

Question 9. *Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$.*

(a) *Définissez « A est un ensemble fermé ».*

$$\forall x^* \in \mathbb{R}^N,\ \forall (x_n)_{n\in I} \subseteq A, \quad x_n \to x^* \Rightarrow x^* \in A.$$

(b) *Définissez « B est un ensemble séquentiellement compact ».*

$$\forall (x_n) \subseteq B,\ \exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n),\ \exists b \in B, \quad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} b.$$

(c) *Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$.*

- *Complétez l'affirmation suivante :*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\} \qquad \textit{pour certains } a,b,c \in \mathbb{R}$$
$$\textit{tels que } a \neq 0 \textit{ ou } b \neq 0.$$

- *D est-il un ensemble fermé ? Justifiez.*

  Oui. Soient $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_n) = \big((x_{n,1}, x_{n,2})\big) \subseteq D$ tels que $x_n \to x^*$. Il faut prouver que $x^* \in D$. L'appartenance de x_n à D signifie que $ax_{n,1} + bx_{n,2} + c = 0$. Comme cette égalité est vraie pour tout n et que $x_{n,1} \to x_1^*$ et $x_{n,2} \to x_2^*$, on trouve à la limite que $ax_1^* + bx_2^* + c = 0$ ce qui montre que $x^* \in D$ comme désiré.

- *D est-il un ensemble séquentiellement compact ? Justifiez.*

  Non car une droite n'est pas bornée (vu que par exemple la suite de points $v + n(-b, -a) \in D$, où $v \in D$, n'est pas bornée) et on sait que tout ensemble séquentiellement compact est borné.

(d) *Si A est fermé et B est compact, montrez que $A + B := \{z \in \mathbb{R}^N : \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}$ est fermé.*

Soit $z \in \mathbb{R}^N$ et $(z_n) \subseteq A + B$ tels que $z_n \to z$. Il faut montrer que $z \in A + B$. Puisque $z_n \in A + B$, on peut écrire $z_n = x_n + y_n$ pour certains $x_n \in A$ et $y_n \in B$. Or B est compact, donc séquentiellement compact, ce qui implique qu'il existe une sous-suite (y_{n_k}) de (y_n) et un $b \in B$ tels que $y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} b$. Par conséquent,

$$x_{n_k} = z_{n_k} - y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} z - b \in A$$

où l'appartenance à A résulte du fait que A est fermé. On peut donc écrire $z = (z - b) + b$ avec $z - b \in A$ et $b \in B$ ce qui montre que $z \in A + B$.

(e) *Afin d'établir que la simple fermeture de A et B n'est pas suffisante dans (d), prouvez que $(0,0) \in \operatorname{adh}(A+B)$ et $(0,0) \notin A + B$ où $A := \{(x, 1/x) : x > 0\}$ et $B := \{(x, -1/x) : x > 0\}$.*

- $(0,0) \in \operatorname{adh}(A+B)$. Posons $x_n = (1/n, n) \in A$ et $y_n = (1/n, -n) \in B$. On a $x_n + y_n \in A + B$ et $x_n + y_n = (2/n, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$.
- $(0,0) \notin A + B$. Supposons au contraire que $(0,0) \in A + B$, c'est-à-dire qu'il existe $x > 0$ et $y > 0$ tels que $(0,0) = (x, 1/x) + (y, 1/y) = (x + y, 1/x + 1/y)$. En regardant les premières composantes, on aboutit à la contradiction $0 = x + y > 0$.