Analyse mathématique I

Examen (9 septembre 2003)

Nom :
Prénom :
Section :

Commencez par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les *explications* sont aussi (voire plus) importantes que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la longueur des réponses attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2+2}{n^2+\sqrt{n}}$$

converge-t-elle ? Détaillez votre raisonnement.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Plaçons nous dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ muni de la norme 2, notée $|\cdot|_2$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ \big(\forall \varepsilon > 0,\ |x-y|_2 < \varepsilon\big) \Rightarrow x = y$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \big(|x-y|_2 < \varepsilon \Rightarrow x = y\big)$

Analyse mathématique I

Examen (9 septembre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ en termes de petit o de la fonction

$$f(x) := \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Utilisez l'approximation Taylorienne ci-dessus pour calculer la limite :

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x) - x - 1}{e^{\cos x - 1} - 1} .$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t^2 u - \partial_t u - 2u = \mathrm{ch}(t).$$

Calculez en toutes les solutions. (Rappel : par définition, $\mathrm{ch}\, t := (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$.)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. On considère l'équation différentielle

$$\partial_t^2 u - c^2\, \partial_x^2 u = 0 \tag{1}$$

où $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $c \in \mathbb{R}$. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions quelconques de classe $\mathscr{C}^2$. Montrez que

$$u(t,x) := f(ct - x) + g(ct + x)$$

satisfait (1).

Analyse mathématique I

Examen (9 septembre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6.

- Donnez la définition de « la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ ».

- Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$. Prouvez, *à partir de la définition que vous avez donnée au point précédent*, que $x_n^2 \to a^2$.

Analyse mathématique I

Examen (9 septembre 2003)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Considérons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \left(\mathrm{e}^{xy^2}, \sin(x+y), x\ln(y^2+1)\right)$$

$$\partial_1 g(1,0,0) = 4, \quad \partial_2 g(1,0,0) = 6, \quad \partial_3 g(1,0,0) = 9,$$

$$\partial_1 g(0,1,0) = -2, \quad \partial_2 g(0,1,0) = -3, \quad \partial_3 g(0,1,0) = 5,$$

$$\partial_1 g(0,0,1) = 3, \quad \partial_2 g(0,0,1) = 2, \quad \partial_3 g(0,0,1) = 1.$$

Calculez la différentielle totale $\partial(g \circ f)(0,0)$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8.

- Définissez « $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est un ensemble fermé ».

- Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos t$. Montrez, à partir de la définition ci-dessus, que l'image de f est fermée.

- Est-il vrai en général que l'image d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fermée ? Donnez un court argument ou un contre-exemple.

Nom : ____________
Prénom : ____________
Section : ______

Question 9. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite converge vers son suprémum, alors elle est croissante.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite est bornée, alors tous ses éléments sont $\geqslant 0$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si un ensemble est compact, alors son complémentaire ne l'est pas.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9 (suite).

Vrai : ☐ Faux : ☐ De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Vrai : ☐ Faux : ☐ La tangente au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ en $x = 0$ a pour équation $y = \partial f(0)x$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $0 \cdot (+\infty) = 0$ car quelles que soient les suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \to 0$ et $y_n \to +\infty$, on a $x_n y_n \to 0$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels convergeant vers $+\infty$, alors la suite (x_n/y_n) peut converger vers n'importe quel réel $\geqslant 0$ (selon le choix de (x_n) et (y_n)).

Analyse mathématique I

Examen (9 septembre 2003)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle (éventuellement non borné) de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Définissez « f est strictement croissante sur I ».

- Lorsque f est dérivable sur $\operatorname{int} I$, énoncez une condition sur ∂f qui assure la stricte croissance de f.

- Prouvez que, si f est strictement croissante sur I, alors f possède au plus une racine dans I.

- Montrez que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x + x - 4$ possède une unique racine. Détaillez votre raisonnement.