Analyse mathématique I

Examen (16 janvier 2004)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Définissez

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ne converge pas vers $-\infty$;
- L'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ est borné ;
- $a \in \mathbb{R}$ est l'infimum de $A \subseteq \mathbb{R}$;
- $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r)$ où $x \in \mathbb{R}^N$ et $r \in \mathbb{R}_+$;
- $\mathbb{R}$ est complet.

Question 2.

(a) Définissez « la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ ».

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite).

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $n^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. (Nous ne voulons pas le brouillon mais seulement la rédaction finale.)

(c) Montrez que la définition donnée en (a) est équivalente à

$$\forall R' > 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0', \quad x_n \geqslant R'/2.$$

Analyse mathématique I

Examen (16 janvier 2004)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Étudiez la convergence des suites suivantes. Détaillez votre raisonnement. Énoncez clairement les résultats que vous utilisez.

(a) $x_n = \dfrac{n-1}{3^n(n+2)}$

(b) $y_n = \left(\dfrac{n-1}{2-n}\right)^3$

(c) $z_n = \dfrac{(\sin n)n^2}{(n+1)^4}$

(d) $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-2)^n}$

(e) $t_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n+1}{n-2}$

(f) $s_n = \dfrac{4^{n+1}}{(n-1)!}$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Montrez que les deux affirmations suivantes à propos d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ sont équivalentes.

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists x \in A, \quad x \geqslant R \tag{1}$$

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, \quad x_n \to +\infty \tag{2}$$

Analyse mathématique I

Examen (16 janvier 2004)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ____

Question 5. Les ensembles suivants admettent-ils un maximum, un minimum, un suprémum, un infimum ? Donnez la valeur des quantités qui existent.

$$A = \left\{ \sin\left(\frac{1}{n+1} + \pi \right) : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ 4 - \frac{6^n}{(n+2)!} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. *Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.*

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite ne converge pas, alors aucune de ses sous-suites ne converge.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Tout ensemble de $\mathbb{R}$ possède un infimum dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in A,\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x, r) \cap A \neq \varnothing$, où A est une partie de $\mathbb{R}$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de rationnels converge dans $\mathbb{R}$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite converge (au sens strict) alors elle est bornée inférieurement.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soit l'ensemble $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tous les a_i sont des nombres réels. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez.

Vrai : ☐ Faux : ☐ E est borné inférieurement par a_1.

Vrai : ☐ Faux : ☐ E est borné.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Il est possible que $\max E = a_1$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\min E$ existe toujours.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Question 8. Étudiez en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \left(\frac{1}{\lambda^3}\right)^n$. Plus précisément, dites pour quelle(s) valeur(s) de λ la suite converge et précisez sa limite.

Analyse mathématique I

Examen (16 janvier 2004)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Soit $a \in [0,1]$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a) \end{cases}$$

(a) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant 1$. (Indication : mettez $x_n - \sqrt{a}$ en évidence.)

(b) À l'aide du point précédent, prouvez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

(c) Concluez-en que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) Déterminez la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Justifiez toutes les étapes de votre raisonnement.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite convergente. Prouvez, à l'aide de la « définition en ε, n », que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 11.

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 1)$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = ax_n + b \end{cases}$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n := x_n - c$ où $c \in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez c tel que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

(b) Exprimez y_n explicitement en fonction de n.

(c) Exprimez x_n explicitement en fonction de n.

(d) Pour quelles valeurs de a et b la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.