Analyse mathématique I

Examen (16 janvier 2004)

Correction

Question 1. *Définissez*

- *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ne converge pas vers $-\infty$;*

  C'est la négation de $\forall R \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \leqslant R$, c'est-à-dire $\exists R \in \mathbb{R},\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0,\ x_n > R$.

- *L'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ est borné ;*

  $\exists R \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant R$ ou, de manière équivalente, $\exists R \in \mathbb{R},\ A \subseteq \mathrm{B}[x,R]$.

- *$a \in \mathbb{R}$ est l'infimum de $A \subseteq \mathbb{R}$;*

  $$\begin{cases} a \text{ est un minorant de } A, \text{ c'est-à-dire } \forall x \in A,\ a \leqslant x \\ a \text{ est plus grand que tout autre minorant : } \forall a' \in \mathbb{R},\ (\forall x \in A,\ a' \leqslant x) \Rightarrow a' \leqslant a \end{cases}$$

- $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r)$ *où $x \in \mathbb{R}^N$ et $r \in \mathbb{R}_+$;*

  $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : \|y-x\| < r\}$.

- $\mathbb{R}$ *est complet.*

  Toute suite *de Cauchy* dans $\mathbb{R}$ converge (dans $\mathbb{R}$).

Question 2.

(a) *Définissez « la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ ».*

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \geqslant R \tag{1}$$

(b) *En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $n^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. (Nous ne voulons pas le brouillon mais seulement la rédaction finale.)*

Soit $R \in \mathbb{R}$. Prenons $n_0 = \left\lceil \sqrt[4]{|R|} \right\rceil$ où $\lceil \rho \rceil$ désigne le plus petit entier $\geqslant \rho$. Remarquons que, puisque $|R| \geqslant 0$, $\sqrt[4]{|R|}$ existe et $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n \geqslant n_0$. Vu que $n_0 \geqslant \sqrt[4]{|R|}$ et que $\rho \mapsto \rho^4$ est une fonction croissante pour $\rho \geqslant 0$, on a $n_0^4 \geqslant |R| \geqslant R$. Par conséquent $n^4 \geqslant n_0^4 \geqslant R$ comme désiré.

(c) *Montrez que la définition donnée en (a) est équivalente à*

$$\forall R' > 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0',\quad x_n \geqslant R'/2. \tag{2}$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $R' > 0$. En vertu de (1) avec $R = R'$, on obtient l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ x_n \geqslant R.$$

Posons $n_0' := n_0$. Si $n > n_0'$, on a en particulier que $n \geqslant n_0$ et donc que $x_n \geqslant R = R' \geqslant R'/2$ (où la dernière inégalité utilise le fait que $R' \geqslant 0$). Ceci montre que (2) est vérifié sous l'hypothèse (1).

(2) $\Rightarrow$ (1) On suppose maintenant (2) et on va prouver (1). Soit $R \in \mathbb{R}$. Par (2) avec $R' = 2|R|+1$ (qui est > 0), on a l'existence d'un $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > n_0',\ x_n \geqslant R'/2$$

Posons $n_0 := n_0' + 1$. Si $n \geqslant n_0$, on a que $n \geqslant n_0' + 1 > n_0'$ et donc que

$$x_n \geqslant \frac{R'}{2} = \frac{2|R|+1}{2} \geqslant |R| \geqslant R.$$

Ceci finit la preuve du fait que (1) est vérifié.

Question 3. *Étudiez la convergence des suites suivantes. Détaillez votre raisonnement. Énoncez clairement les résultats que vous utilisez.*

(a) $x_n = \dfrac{n-1}{3^n(n+2)}$ *(c)* $z_n = \dfrac{(\sin n)n^2}{(n+1)^4}$ *(e)* $t_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n+1}{n-2}$

(b) $y_n = \left(\dfrac{n-1}{2-n}\right)^3$ *(d)* $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-2)^n}$ *(f)* $s_n = \dfrac{4^{n+1}}{(n-1)!}$

(a) On a $x_n = \dfrac{1}{3^n}\dfrac{n-1}{n+2}$. Or, $\lim_{n\to\infty} 1/3^n = 0$ par la propriété : $a^n \to 0$ ssi $|a| < 1$. Ici, $a = 1/3$. D'autre part,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-1/n}{1+2/n} = 1$$

car $1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme chaque limite existe, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2} = 0\cdot 1 = 0.$$

(b) On a $y_n = \dfrac{(1-1/n)^3}{(2/n-1)^3}$. Or, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^3 = 1$ et $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-1\right)^3 = -1$ car $1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme chaque limite existe et que celle du dénominateur est non nulle, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^3}{\lim_{n\to\infty}(2/n-1)^3} = \frac{1}{-1} = -1.$$

(c) On a $|z_n| \leqslant \dfrac{n^2}{(n+1)^4}$ car $|\sin n| \leqslant 1$. Or,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2(1+1/n)^4} = 0.$$

Par la convergence dominée, on déduit que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(d) Si n est pair, on a $u_n = \dfrac{n-1}{n+2^n} = \dfrac{1-1/n}{1+2^n/n}$ et $\lim_{n\to\infty} u_{2n} = 0$.
Si n est impair, on a $u_n = \dfrac{n+1}{n-2^n} = \dfrac{1+1/n}{1-2^n/n}$ et $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$.
Puisque $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$ et que les deux sous-suites $(u_n)_{n\in 2\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in 2\mathbb{N}+1}$ convergent toutes deux vers 0, on déduit que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

(e) Si n est pair, on a $t_n = \dfrac{-n+1}{n-2}$ et $\lim_{n\to\infty} t_{2n} = -1$.
Si n est impair, on a $t_n = \dfrac{n+1}{n-2}$ et $\lim_{n\to\infty} t_{2n+1} = 1$.
Ainsi, les deux sous-suites $(u_n)_{n\in 2\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in 2\mathbb{N}+1}$ convergent respectivement vers -1 et 1. Donc la suite ne converge pas.

(f) On a $s_n = 4^2 \dfrac{\overbrace{4\cdots 4}^{n-1 \text{ fois}}}{(n-1)!} = 4^2 \dfrac{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdots 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots (n-1)}$ Donc, comme toutes les fractions $\frac{4}{5}, \dots, \frac{4}{n-2}$ sont $\leqslant 1$, on a

$$|s_n| \leqslant 4^2 \frac{4^3}{3!} \frac{4}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par la convergence dominée, $\lim s_n = 0$.

Question 4. *Montrez que les deux affirmations suivantes à propos d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ sont équivalentes.*

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists x \in A, \quad x \geqslant R \tag{3}$$
$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, \quad x_n \to +\infty \tag{4}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (3) avec $R = n$, on trouve un x, qu'on va noter x_n pour mettre en évidence sa dépendance en n, tel que

$$x_n \in A \quad \text{et} \quad x_n \geqslant n.$$

Comme n est arbitraire, on a donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. L'inégalité $x_n \geqslant n$ étant vraie pour tout n, le théorème de convergence dominée implique que $x_n \to +\infty$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Soit $R \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition de $x_n \to +\infty$ avec ce R (voir formule (1)), on trouve qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \geqslant R$. Posons $x := x_{n_0}$. On a bien que $x = x_{n_0} \geqslant R$ ce qui termine la preuve.

Question 5. *Les ensembles suivants admettent-ils un maximum, un minimum, un suprémum, un infimum ? Donnez la valeur des quantités qui existent.*

$$A = \Big\{\sin\Big(\frac{1}{n+1}+\pi\Big) : n \in \mathbb{N}\Big\}, \qquad B = \Big\{4 - \frac{6^n}{(n+2)!} : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

ENSEMBLE A. Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \pi \leqslant \pi + \frac{1}{n+1} \leqslant \pi + 1 \leqslant \frac{3\pi}{2} \tag{5}$$

$$\text{la suite } \Big(\pi + \frac{1}{n+1}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.} \tag{6}$$

Puisque dans le troisième quadrant, c'est-à-dire dans $[\pi, 3\pi/2]$, la fonction sinus est décroissante, on déduit de (6) que la suite $\big(\sin(\pi + 1/(n+1))\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sera croissante.
Ainsi $\min A$ sera atteint pour $n = 0$. Donc $\min A = \inf A = \sin(\pi + 1)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sup A &= \lim_{n\to\infty} \sin\Big(\pi + \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= \sin\Big(\pi + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\Big) \qquad \text{(car la fonction sinus est continue)} \\ &= \sin \pi = 0. \end{aligned}$$

$\max A$ n'existe pas car $0 = \sup A \notin A$.
ENSEMBLE B. Étudions la croissance de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = 6^n/(n+2)!$:

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6^n}{(n+2)!} \leqslant \frac{6^{n+1}}{(n+3)!} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant \frac{6}{n+3} \quad \Leftrightarrow \quad n+3 \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant 3.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 4}$ est donc décroissante. On en déduit que $\max\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est atteint pour $n = 4$ et vaut donc $6^4/6! = 9/5$ et $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \min\big\{x_0, \lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{(n+2)!}\big\} = \min\{1/2, 0\} = 0$, d'où $\min\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ n'existe pas vu que $x_n \neq 0$ pour tout n.
En conclusion, $\sup B = 4 - \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 4 - 0 = 4$; $\max B$ n'existe pas car $\sup B \notin B$; $\inf B = \min B = 4 - \max\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 4 - 9/5 = 11/5$.

Question 6. *Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple.* Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *Si une suite ne converge pas, alors aucune de ses sous-suites ne converge.*

Par exemple, la suite $(x_n) = \big((-1)^n\big)$ ne converge pas (vu au cours) bien que la sous-suite des éléments d'indices pairs $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est rien d'autre que la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers 1.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Tout ensemble de $\mathbb{R}$ possède un infimum dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

C'est un théorème vu au cours.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\forall x \in A,\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r) \cap A \neq \varnothing$*, où A est une partie de $\mathbb{R}$.*

En effet, quelque soient $x \in A$ et $r > 0$, on a $x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r)$ — vu que $\|x - x\| = \|0\| = 0 < r$. Par conséquent
$$x \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r) \cap A$$
ce qui implique que $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *Toute suite de rationnels converge dans $\mathbb{R}$.*

Par exemple, la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est composée d'éléments rationnels (1 et -1 appartiennent à $\mathbb{Q}$) et pourtant elle ne converge pas (vu au cours).

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Si une suite converge (au sens strict) alors elle est bornée inférieurement.*

En effet, si une suite $(x_n)_{n\in I}$ converge, elle est bornée (vu au cours), c'est-à-dire : $\exists R \in \mathbb{R},\ \forall n \in I,\ |x_n| \leqslant R$. Par conséquent on a aussi que $\exists R \in \mathbb{R},\ \forall n \in I,\ x_n \geqslant -R$ ce qui est équivalent à la définition de « $(x_n)_{n\in I}$ est bornée inférieurement ».

Question 7. *Soit l'ensemble $E = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ où $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tous les a_i sont des nombres réels. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez.*

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *E est borné inférieurement par a_1.*

Prenons $m = 2$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$. $a_1 = 2$ n'est pas une borne inférieure de $E = \{2, 1\}$ vu que $2 \nleqslant a_2 = 1$.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *E est borné.*

En effet, il suffit de prendre $R = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |a_i|$ pour avoir $\forall x \in E,\ |x| \leqslant R$.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Il est possible que* $\max E = a_1$.

Prenons $m = 1$ et $a_1 = 1$. On a bien $\max\{1\} = 1 = a_1$.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\min E$ *existe toujours.*

En comparant les a_i deux à deux, on peut déterminer lequel d'entre eux est le plus petit (on peut même écrire un algorithme pour cette tâche).

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Prenons $m = 2$, $a_1 = -1$ et $a_2 = 1$. On a bien que la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{-1, 1\}$ et qu'elle ne converge pas.

Question 8. *Étudiez en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \left(\frac{1}{\lambda^3}\right)^n$. Plus précisément, dites pour quelle(s) valeur(s) de λ la suite converge et précisez sa limite.*

On a vu en exercices que :

> Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $-1 < c \leqslant 1$. De plus, si $|c| < 1$, $c^n \to 0$ et si $c = 1$, $c^n \to 1$.

Ici $c = 1/\lambda^3$. La suite (x_n) convergera vers 0 si et seulement si $|1/\lambda^3| < 1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\text{ssi} \quad |\lambda|^3 > 1 \\ &\text{ssi} \quad |\lambda| > 1 \\ &\text{ssi} \quad \lambda \in \,]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[\end{aligned}$$

La suite (x_n) convergera vers 1 si et seulement si $1/\lambda^3 = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = 1$.

Question 9. *Soit $a \in [0,1]$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ par*

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a) \end{cases} \tag{7}$$

(a) *Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant 1$. (Indication : mettez $x_n - \sqrt{a}$ en évidence.)*

(b) *À l'aide du point précédent, prouvez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.*

(c) *Concluez-en que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

(d) *Déterminez la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Justifiez toutes les étapes de votre raisonnement.

(a) Vu que $0 \leqslant a \leqslant 1$, on a $\sqrt{a} \leqslant 1$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{a}$. Pour $n = 0$, c'est évident car $0 \leqslant x_0 = 0 \leqslant \sqrt{a}$. Supposons donc que $0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{a}$ et déduisons en $0 \leqslant x_{n+1}$ et $x_{n+1} \leqslant \sqrt{a}$. En remplaçant x_{n+1} en fonction de x_n grâce à (7), il résulte que :

$$0 \leqslant x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad x_n - \tfrac{1}{2}(x_n^2 - a) \geqslant 0 \tag{8}$$

$$x_{n+1} \leqslant \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x_n - \tfrac{1}{2}(x_n^2 - a) \leqslant \sqrt{a} \tag{9}$$

Vu que $0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{a}$, on a en élevant au carré que $x_n^2 - a \leqslant 0$ et donc

$$x_{n+1} = x_n - \tfrac{1}{2}(x_n^2 - a) \geqslant x_n \geqslant 0. \tag{10}$$

D'autre part, (9) se réécrit $x_n - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})$. Si $x_n = \sqrt{a}$ alors l'inégalité est vérifiée. Sinon, il faut montrer que $2 \geqslant x_n + \sqrt{a}$ (il faut faire attention qu'ici $x_n - \sqrt{a} < 0$ et donc diviser les deux membres de l'inégalité par cette quantité en change le sens). Or $x_n \leqslant \sqrt{a}$ et par conséquent $x_n + \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a} \leqslant 2 \cdot 1 = 2$.

(b) Ceci a déjà été montré au point précédent — cf. l'équation (10).

(c) On a appris au cours qu'une suite croissante et majorée converge (vers le suprémum de ses éléments). Le point (b) montre que (x_n) est croissante et le point (a) qu'elle est majorée par $\sqrt{a}$. La suite (x_n) converge donc.

(d) Appelons x^* la limite de (x_n). Bien évidemment, $x_{n+1} \to x^*$ (pouvez-vous le prouver ?). Dès lors, en passant à la limite sur (7), on trouve que

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \bigl(x_n - \tfrac{1}{2}(x_n^2 - a)\bigr) = x^* - \tfrac{1}{2}\bigl((x^*)^2 - a\bigr)$$

(la dernière égalité résulte des règles de calcul concernant les limites de sommes et de produits). Par conséquent, x^* satisfait l'équation $x^* = x^* - \frac{1}{2}\bigl((x^*)^2 - a\bigr)$ ce qui implique que $(x^*)^2 = a$ et donc que $x^* = \sqrt{a}$ ou que $x^* = -\sqrt{a}$. Mais comme $0 \leqslant x_n$ pour tout n, on a que $0 \leqslant x^*$ et donc que $x^* = \sqrt{a}$. (La racine $-\sqrt{a}$ n'est acceptable que si elle vaut 0 mais alors $a = 0$ et aussi $\sqrt{a} = 0$. Par conséquent, $-\sqrt{a}$ ne nous donne pas une racine qu'on n'avait pas déjà).

Question 10. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite convergente. Prouvez, à l'aide de la « définition en ε, n », que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$. Or on sait que (x_n) converge, disons vers a, et donc que $\forall \varepsilon' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geqslant n_0',\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon'$. En prenant $\varepsilon' = \varepsilon/2$ dans cette hypothèse, on obtient un $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0',\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon' = \varepsilon/2. \tag{11}$$

Posons $n_0 := n_0'$. Soit $n \geqslant n_0$. On a que $n+1 \geqslant n \geqslant n_0'$ et dès lors (11) implique que $|x_{n+1} - a| \leqslant \varepsilon/2$ et $|x_n - a| \leqslant \varepsilon/2$. Il en résulte que

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant |x_{n+1} - a| + |x_n - a| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui est ce que nous voulions démontrer.

Question 11.

- *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 1$) et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = a x_n + b \end{cases} \tag{12}$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n := x_n - c$ où $c \in \mathbb{R}$.

(a) *Trouvez c tel que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.*

(b) *Exprimez y_n explicitement en fonction de n.*

(c) *Exprimez x_n explicitement en fonction de n.*

(d) *Pour quelles valeurs de a et b la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?*

(a) La suite (y_n) est géométrique s'il existe une constante $d \in \mathbb{R}$ telle que $y_{n+1} = dy_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant y_n par sa définition en fonction de x_n, on trouve

$$x_{n+1} - c = y_{n+1} = dy_n = d(x_n - c).$$

Or, en utilisant la définition (12), l'équation précédente devient : $ax_n + b - c = dx_n - dc$. Une condition *suffisante* pour que cette équation soit satisfaite est d'égaler les coefficients de x_n et les termes indépendants. On obtient les deux égalités : $a = d$ et $b - c = -dc$, d'où on tire que $c = b/(1-a)$ (l'hypothèse $a \neq 1$ venant à priori de nulle part de l'énoncé vous simplifie la vie ici).

(b) Avec les choix faits ci-dessus, on a $y_{n+1} = ay_n$. Un simple argument par récurrence (qui vous est laissé) montre que

$$\forall n \geqslant 0, \quad y_n = a^n y_0.$$

Or $y_0 = x_0 - c = x_0 - b/(1-a)$. En conclusion, on a

$$\forall n \geqslant 0, \quad y_n = a^n \Big(x_0 - \frac{b}{1-a}\Big). \tag{13}$$

(c) Puisque $y_n = x_n - c$, on a $x_n = y_n + c$ et (13) implique

$$x_n = a^n \Big(x_0 - \frac{b}{1-a}\Big) + \frac{b}{1-a}.$$

(d) Puisque, dans la formule (c), le n n'apparaît plus qu'en exposant de a, la question revient à savoir quand (a^n) converge. Ceci a été vu au cours : (a^n) converge si et seulement si $a \in \left]-1,1\right]$. Or l'énoncé exclu $a = 1$. Donc

$$(x_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left]-1,1\right[\text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

De plus, dans ce cas, $a^n \to 0$ et on en déduit que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b}{1-a}.$$

REMARQUE : *Si* (x_n) converge, disons vers x^*, alors (12) implique que $x^* = ax^* + b$ et donc que $x^* = b/(1-a)$ (sous l'hypothèse $a \neq 1$).

QUESTION OUVERTE : Pouvez-vous compléter le résultat ci-dessus en traitant également le cas $a = 1$? (Il est attendu qui vous puissiez y arriver avec un peu de réflexion.)