Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2004)

Nom :
Prénom :
Section :

Commencez par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Si vous avez les pages 12–15, cela signifie que vous représentez l'examen de janvier. Au cas où ce ne serait pas votre intention veuillez le signaler *immédiatement*.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les *explications* sont aussi (voire plus) importantes que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la longueur des réponses attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction dérivable et $a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$. Écrivez une formule qui donne l'abscisse de l'intersection, appelons la $b \in \mathbb{R}$, de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ avec l'axe des x. Détaillez votre raisonnement.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{a-\pi}\, x_n \end{cases} \qquad \text{où } a \neq \pi.$$

(a) Existe-t-il une ou des valeurs de a pour lesquelles la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ? Si oui, donnez-les toutes. Expliquez votre démarche.

(b) Même question avec π au lieu de 0.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soit l'équation différentielle

$$\partial_t v = \lambda v \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Donnez toutes les solutions réelles de cette équation en fonction du paramètre λ. Expliquez la méthode de résolution que vous utilisez.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'équation admet-elle des solutions non-nulles qui tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$? Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit l'équation différentielle

$$\partial_t^2 u + u = \mathrm{e}^t + 2\sin t$$

Donnez toutes les solutions réelles de cette équation.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2004)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ en termes de petit o de la fonction

$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+\sin x}$$

Utilisez l'approximation ci-dessus pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x) - x - 1}{\ln(1+x) + \cos(3x) - x - 1}$$

Pour rappel, on a vu les développements en série suivants :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \qquad \sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \qquad \cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i!} x^{2i} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6.

(a) Définissez « la fonction $f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $(x_0, y_0) \in \operatorname{Dom} f$ » en termes de suites et en « ε, δ ».

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$.

(b) Montrez que f est continue en *tout* point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en précisant quelle définition vous utilisez parmi les deux données en (a).

(c) Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $a = (a_1, a_2)$ avec $a_2 > 0$ et $b = (b_1, b_2)$ avec $b_2 < 0$. Considérons un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Montrez qu'il existe (au moins) un $\xi \in [0, 1]$ tel que $\gamma(\xi)$ appartient à la droite d'équation $y = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2004)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 1 + \big(u(x, x^2)\big)^3 + \sin u(\mathrm{e}^x, x+2)$$

où $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (p,q) \mapsto u(p,q)$ est une certaine fonction différentiable sur laquelle on a les informations suivantes :

$$\begin{array}{lll} u(0,0) = 2 & \partial_p u(0,0) = \frac{1}{4} & \partial_q u(0,0) = \frac{1}{8} \\ u(1,2) = \pi & \partial_p u(1,2) = 5 & \partial_q u(1,2) = -7 \\ u(\mathrm{e},2) = -\pi & \partial_p u(\mathrm{e},2) = 7 & \partial_q u(\mathrm{e},2) = -5 \end{array}$$

Calculez la dérivée de f en $x = 0$. La réponse finale doit être numérique mais il est bien entendu nécessaire d'expliquer les différentes étapes de calcul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. On considère la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quels a cette série converge-t-elle ?

(b) Pour chacun des a pour lequels vous affirmez la convergence, veuillez donner la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ (en fonction de a).

Pour ceux qui ne représentent pas la partie de janvier, l'examen se termine ici.

Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2004)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ______

La suite concerne uniquement ceux qui représentent l'examen de janvier.

Question 9. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. *Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.*

Vrai : ☐ Faux : ☐ L'ensemble $\varnothing$ est à la fois ouvert et fermé.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est décroissante, alors $x_n \to x^*$ pour un certain $x^* \in \mathbb{R}$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Quelles que soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*, alors $f(x^*) = x^*$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge au sens strict.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Étudiez la convergence des suites suivantes. Détaillez votre raisonnement. Énoncez clairement les résultats que vous utilisez.

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 2}{(-1)^{n+2} n + 3}$ (b) $y_n = \dfrac{\sin n^3}{n^3}$ (c) $z_n = \dfrac{(-8)^n}{(n+2)!}$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11.

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est l'infimum de A ».

- À partir de la définition donnée au point précédent, prouvez que

$$1 = \inf\left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

- À partir de la définition donnée ci-dessus, prouvez que

$$1 \neq \inf\{n^2 - 2n + 6 : n \in \mathbb{N}\}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Les deux affirmations suivantes sont-elles équivalentes ?

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - a| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon' \geqslant 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0', \quad |x_n - a| \leqslant \varepsilon' \tag{2}$$

Veuillez être précis en cochant la case adéquate pour les deux affirmations suivantes :

Vrai : ☐ Faux : ☐ (1) ⇒ (2)

Vrai : ☐ Faux : ☐ (2) ⇒ (1)

Chaque réponse « vrai » nécessite une démonstration, chaque réponse « faux », un contre-exemple.