Analyse mathématique I

Examen (19 août 2004)

Nom :

Prénom :

Section :

Avant de commencer à répondre, écrivez en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les *explications* sont aussi (voire plus) importantes que les résultats. Soignez donc la manière dont vous vous exprimez ; ne pensez pas que les correcteurs peuvent « boucher les trous » parce qu'ils connaissent le cours. Les explications concises et pertinentes sont les plus appréciées ! Allez droit au but !
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la longueur des réponses attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite convergeant vers $a \in \mathbb{R}$. Montrez que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{n+1}$ converge aussi vers a. Énoncez clairement les définitions utilisées et soyez précis(e) dans la rédaction de votre raisonnement.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Étudiez la convergence des suites suivantes. Détaillez votre raisonnement. Énoncez clairement les résultats que vous utilisez.

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n^2+2}}{3-(-1)^{n+1}n}$ (b) $y_n = \dfrac{\cos n^4}{n^7+1}$ (c) $z_n = \dfrac{(-3)^{n+1}}{1+(n-1)!}$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3.

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le maximum de A » et « a est le suprémum de A ».

- Prouvez à partir de ces définitions que si $\max A$ existe, alors $\sup A$ existe et $\sup A = \max A$.

- Calculez, s'ils existent, le maximum et le suprémum de l'ensemble $A := \{4 - x^2 : x \in \mathbb{R}$ et $0 < x < 1\}$. Justifiez en détail votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

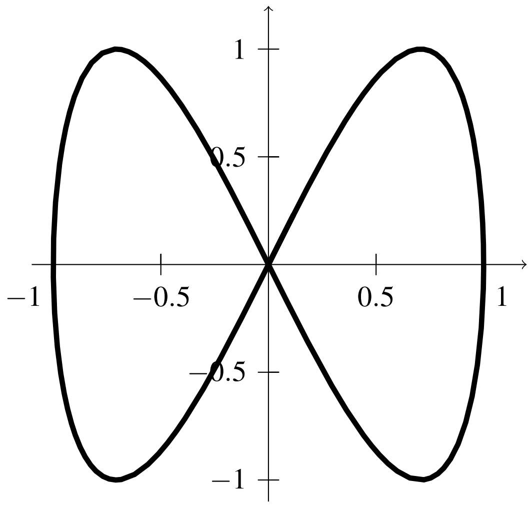
(a) Tracez le graphe de f pour a prenant les valeurs 0, 3 et -3.

(b) Donnez les valeurs de a (s'il en existe) pour lesquelles la fonction f est continue. Prouvez vos affirmations.

(c) Donnez les valeurs de a (s'il en existe) pour lesquelles la fonction f *n'est pas* continue. Prouvez vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin t, \sin(2t)\big)$. Donnez une équation cartésienne de la tangente à l'image de f en $t = 0$ et représentez la sur le graphe ci-dessous.



Question 6. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Pour chacune des deux affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall \varepsilon > 0,\ \|x\| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall \varepsilon > 0,\ (\|x\| < \varepsilon \Rightarrow x = 0)$

Justifiez vos choix par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soit l'équation différentielle

$$\partial_t^2 u + 9u = \cos(3t) + \mathrm{e}^{-t}$$

Donnez toutes les solutions réelles de cette équation.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ en termes de petit o de la fonction

$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto \cos\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} - 1\right)$$

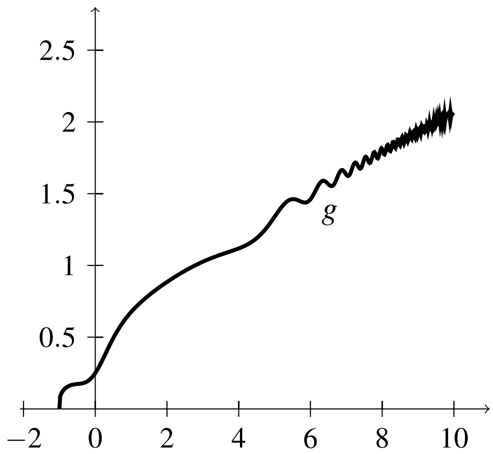
Utilisez l'approximation ci-dessus pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} g(x) \qquad \text{où} \qquad g(x) := \frac{f(x) + x^2 - 1}{2x \ln(1+x)}.$$

Pour rappel, on a vu les développements en série suivants :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \qquad \cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i!} x^{2i} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

Par ailleurs, le graphique ci-dessous peut vous permettre de voir si votre réponse est plausible...



Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = u\big(\mathrm{e}^{-1/x}, \sin(1/x)\big)^2$$

où $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (p,q) \mapsto u(p,q)$ est une certaine fonction différentiable sur laquelle on a les informations suivantes :

$$u(\mathrm{e}^{-\pi/2},0) = 2 \qquad \partial_p u(\mathrm{e}^{-\pi/2},0) = 0 \qquad \partial_q u(\mathrm{e}^{-\pi/2},0) = \mathrm{e}^{\pi/2}$$

$$u(\mathrm{e}^{-\pi/2},1) = 3 \qquad \partial_p u(\mathrm{e}^{-\pi/2},1) = \mathrm{e}^{\pi/2} \qquad \partial_q u(\mathrm{e}^{-\pi/2},1) = -1$$

Calculez la dérivée de f en $x = 2/\pi$. La réponse finale doit être numérique mais il est bien entendu nécessaire d'expliquer les différentes étapes de calcul.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x+y$.

(a) Montrez que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ en utilisant la définition de continuité en terme de suites.

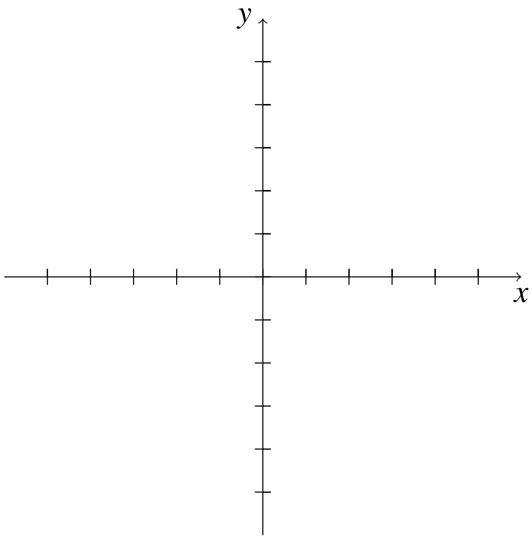
(b) Déterminez $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ et représentez le sur le graphe ci-dessous.

Soient $Q_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$, $Q_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0 \text{ et } y \leqslant 0\}$ deux ensembles et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue telle que

- $\forall t \in [0,1],\ \gamma(t) \in Q_0 \cup Q_1$;
- $\gamma(0) \in Q_0$ et $\gamma(1) \in Q_1$.

(c) Hachurez les zones Q_0 et Q_1 sur la figure ci-dessous (de manière à ce qu'on puisse les différencier).

(d) Montrez que $\exists \xi \in [0,1],\ \gamma(\xi) = (0,0)$. Donnez une brève interprétation graphique de ce fait.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.