Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1.

/3

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ».

- Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

- Définissez « la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est bornée supérieurement ».

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soit $A = \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

/10

(a) Complétez la phrase suivante pour que l'équivalence soit vraie.

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{}, \ a = \frac{1}{2n+1}$$

(b) A-t-on $\frac{1}{3} \in A$? Justifiez en utilisant (a).

(c) A-t-on $\frac{1}{2} \in A$? Justifiez en utilisant (a).

(d) A-t-on $0 \in A$? Justifiez en utilisant (a).

(e) Après avoir rappelé leurs définitions, calculez $\min A$ et $\max A$ s'ils existent. Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Ci-dessous, vous trouverez trois propositions et six phrases. En face de chaque proposition, veuillez indiquer la ou les lettres de la ou les phrase(s) qui exprime(nt) le mieux sa signification. (On ne demande pas de justifier.) /3

	$\forall r \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists x \in \mathbb{R}^N,\ \exists \rho \in \mathbb{R}^{>0},\quad (\rho < r) \wedge \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[x,\rho] \subseteq \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r]$
	$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ \exists r \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r]$
	$\forall r \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r]$

(a) Toute boule est contenue dans une boule centrée à l'origine de rayon plus grand.

(b) Il existe une suite contenue dans toute boule.

(c) Toute boule centrée à l'origine contient une suite.

(d) Toute boule centrée à l'origine contient une boule de rayon plus petit.

(e) Toutes les suites sont contenues dans une même boule.

(f) Toute suite est bornée.

Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. /6

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ».

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite qui converge vers 0. Prouvez, à partir de la définition donnée en (a), que $x_n^+ := \max\{x_n, 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

/9

Question 5. Étudiez la convergence, au sens large, des suites suivantes. Énoncez clairement les résultats du cours que vous utilisez.

(a) $x_n := \dfrac{4^{n-2}}{(n+3)!}$ (b) $y_n := \dfrac{n^{2/3}+n^{1/5}}{\sqrt{n}+1}$ (c) $z_n := \dfrac{n+(-1)^n(n+1)}{2n+1}$

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 6. Soit la suite $(x_n)_{n>0} \subseteq \mathbb{R}$ définie par

$$x_n = \frac{n}{n^p + n}$$

où le paramètre p est un réel strictement positif. Étudiez la convergence de $(x_n)_{n>0}$ en fonction de p. Lorsque $(x_n)_{n>0}$ converge, donnez la valeur de sa limite.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soient $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ deux normes. Prouvez que les deux propositions suivantes sont équivalentes. /5

$$\exists C \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad C^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \tag{1}$$

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \text{ et } C_2\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \tag{2}$$

Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. /8

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le suprémum de A ».

(b) Calculez $\sup(]0,1[\cup]3,\pi[)$. Justifiez votre réponse à l'aide de la définition donnée en (a).

(c) Posons $A := \{x \in \mathbb{R} : \cos x > 0\}$. Existe-t-il un $a \in \mathbb{R}$ qui soit le suprémum de A ? Prouvez votre réponse et énoncez clairement les résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

/10

Question 9. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par la récurrence suivante :

$$x_0 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prouvez, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.

(b) Prouvez, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 \geqslant 2$.

Nom : ___________
Prénom : ___________
Section : ______

Question 9 (suite).

(c) Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(d) Déduisez des points précédents que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (au sens strict).

(e) Calculez la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifiez.