Analyse mathématique I

Examen (17 janvier 2005) **Correction**

Question 1.

- *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ».*

  $\forall \rho \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \geqslant \rho$
- *Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».*

  $\|\cdot\|$ est une norme si c'est une fonction de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :
  - $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\| \geqslant 0$
  - $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
  - $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
  - $\forall x,y \in \mathbb{R}^N,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
- *Définissez « la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est bornée supérieurement ».*

  $\exists R \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant R$

Question 2. *Soit* $A = \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) *Complétez la phrase suivante pour que l'équivalence soit vraie.*

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists n \in \mathbb{N}},\ a = \frac{1}{2n+1}$$

(b) *A-t-on $\frac{1}{3} \in A$? Justifiez en utilisant (a).*

Oui car $\frac{1}{3} = \frac{1}{2n+1}$ pour $n = 1$.

(c) *A-t-on $\frac{1}{2} \in A$? Justifiez en utilisant (a).*

Non car si $\frac{1}{2} = \frac{1}{2n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on aurait $2n = 1$ (pour un certain n), ce qui est impossible car $2n$ est pair et 1 est impair.

(d) *A-t-on $0 \in A$? Justifiez en utilisant (a).*

Non car si on avait $0 = \frac{1}{2n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on en déduirait, par multiplication des deux membres par $2n+1$, que $0 = 1$ ce qui est faux.

(e) *Après avoir rappelé leurs définitions, calculez $\min A$ et $\max A$ s'ils existent. Justifiez.*

a est le minimum de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geqslant a$.

a est le maximum de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leqslant a$.

<u>$\max A = 1$</u> En effet, $1 = \dfrac{1}{2\cdot 0+1}$ et donc $1 \in A$. De plus, si $x \in A$, il peut s'écrire comme $x = \dfrac{1}{2n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et, comme $2n+1 \geqslant 1$, on a $x = \dfrac{1}{2n+1} \leqslant 1$.

<u>$\min A$ n'existe pas.</u> Supposons au contraire que $a \in A$ soit le minimum de A. Puisqu'il appartient à A, $a = \dfrac{1}{2n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Mais alors $a = \dfrac{1}{2n+1} > \dfrac{1}{2(n+1)+1} \in A$ ce qui contredit le fait d'être minimum (spécifiquement, contredit $\forall x \in A,\ x \geqslant a$).

Question 3. *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Ci-dessous, vous trouverez trois propositions et six phrases. En face de chaque proposition, veuillez indiquer la ou les lettres de la ou les phrase(s) qui exprime(nt) le mieux sa signification. (On ne demande pas de justifier.)*

(d)	$\forall r \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists x \in \mathbb{R}^N,\ \exists \rho \in \mathbb{R}^{>0},\quad (\rho < r) \wedge \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[x,\rho] \subseteq \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r]$
(f)	$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ \exists r \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r]$
(c)	$\forall r \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}[0,r]$

(a) *Toute boule est contenue dans une boule centrée à l'origine de rayon plus grand.*

(b) *Il existe une suite contenue dans toute boule.*

(c) *Toute boule centrée à l'origine contient une suite.*

(d) *Toute boule centrée à l'origine contient une boule de rayon plus petit.*

(e) *Toutes les suites sont contenues dans une même boule.*

(f) *Toute suite est bornée.*

Question 4.

(a) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ».*
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon$

(b) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite qui converge vers 0. Prouvez, à partir de la définition donnée en (a), que $x_n^+ := \max\{x_n, 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Commençons par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x^+| = |\max\{x,0\}| \leqslant |x| \tag{1}$$

En effet, si $x \geqslant 0$ alors $x^+ = x$ et on a bien $|x^+| \leqslant |x|$ (puisqu'on a l'égalité) ; si $x \leqslant 0$ alors $x^+ = 0$ et donc $|x^+| = 0 \leqslant |x|$ (puisqu'une valeur absolue est toujours positive).

Prouvons maintenant que $x_n^+ \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n^+ - 0| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

On a par hypothèse que $x_n \to 0$, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0',\ |x_n| \leqslant \varepsilon' \tag{3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant (3) avec $\varepsilon' = \varepsilon$, on trouve qu'il existe un $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0', \quad |x_n| \leqslant \varepsilon' = \varepsilon. \tag{4}$$

Choisissons $n_0 := n_0'$. Soit $n \geqslant n_0$. Il faut montrer que $|x_n^+ - 0| \leqslant \varepsilon$. On a

$$|x_n^+| \leqslant |x_n| \leqslant \varepsilon' = \varepsilon$$

où la première inégalité découle de (1) et la seconde de (4) — qu'on peut utiliser car $n \geqslant n_0 = n_0'$.

Résolution alternative : Nous allons prendre les mêmes notations que ci-dessus : l'hypothèse est (3) et on doit prouver (2). Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant (3) avec $\varepsilon' = \varepsilon$, on trouve qu'il existe un $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que (4). Choisissons $n_0 := n_0'$. Soit $n \geqslant n_0$. Il faut montrer que $|x_n^+| = |x_n^+ - 0| \leqslant \varepsilon$. (C'est ici que la preuve change !) Distinguons deux cas[1]

- si $x_n^+ = x_n$, alors $|x_n^+| = |x_n| \leqslant \varepsilon$ car $n \geqslant n_0 = n_0'$ et on a (4).
- si $x_n^+ = 0$ (l'autre valeur dans le max), alors $|x_n^+| = |0| \leqslant \varepsilon$ car $\varepsilon > 0$.

Dans les deux cas, on a bien montré $|x_n^+| \leqslant \varepsilon$.

Question 5. *Étudiez la convergence, au sens large, des suites suivantes. Énoncez clairement les résultats du cours que vous utilisez.*

(a) $x_n := \dfrac{4^{n-2}}{(n+3)!}$ *(b)* $y_n := \dfrac{n^{2/3} + n^{1/5}}{\sqrt{n} + 1}$ *(c)* $z_n := \dfrac{n + (-1)^n (n+1)}{2n+1}$

(a) On peut écrire $x_n = 4^{-5} \dfrac{4^{n+3}}{(n+3)!}$. On a vu au cours que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par conséquent $\dfrac{4^{n+3}}{(n+3)!} \to 0$ puisque c'est une sous-suite de $\left(\dfrac{4^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La règle de la limite d'un produit donne alors

$$x_n = 4^{-5} \frac{4^{n+3}}{(n+3)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4^{-5} \cdot 0 = 0$$

[1] Selon la valeur de n, on peut se retrouver dans un cas ou dans l'autre. C'est donc uniquement ici et pas avant qu'on peut distinguer ces deux cas. Il n'est *pas* vrai que : $\forall n,\ x_n^+ = x_n$ ou $\forall n,\ x_n = 0$.

RÉSOLUTION ALTERNATIVE : On a, pour $n \geqslant 4$,

$$|x_n| = \frac{4^{n-2}}{(n+3)!} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdots \quad 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n-2) \cdot (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)} \leqslant \frac{4^3}{3!} \cdot \frac{4}{n-2}$$

où la dernière inégalité résulte du fait que tous les autres quotients, à savoir $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{5}$,..., $\frac{4}{n-1}$, et $\frac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}$, sont $\leqslant 1$. Or, $\lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{3!} \frac{4}{n-2} = \frac{4^3}{3!} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n-2} = 0$. Par convergence dominée, on obtient $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(b) On peut écrire

$$y_n = \frac{n^{2/3}}{n^{1/2}} \frac{1+n^{1/5-2/3}}{1+n^{-1/2}} = n^{1/6} \frac{1+n^{-7/15}}{1+n^{-1/2}}.$$

Comme $n^{-7/15} \geqslant 0$ et $1+n^{-1/2} \leqslant 2$, on a la minoration $y_n \geqslant n^{1/6} \frac{1}{2}$. Or, on a vu au cours que $\forall p \in \mathbb{R}^{>0},\ n^p \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Dès lors, par la règle de la limite d'un produit, on a $n^{1/6} \frac{1}{2} \to +\infty$ et, par convergence dominée, on obtient $y_n \to +\infty$.

RÉSOLUTION ALTERNATIVE : On peut écrire

$$y_n = n^{1/6} \cdot \frac{1+n^{-7/15}}{1+n^{-1/2}}$$

Or, on a vu au cours que $\forall p \in \mathbb{R}^{>0},\ n^p \to +\infty$ et $n^{-p} = 1/n^p \to 0$. Dès lors, par la règle de la limite d'un quotient, puis de celle d'un produit, on a $y_n \to +\infty \cdot 1 = +\infty$.

(c) Cette suite ne converge pas. Exhibons en effet deux sous-suites avec des limites différentes. On a

$$z_n = \frac{n+(n+1)}{2n+1} = 1 \qquad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$z_n = \frac{n-(n+1)}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1} \qquad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Par conséquent, $z_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $z_{2n+1} = 1/(4n+3) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Question 6. *Soit la suite $(x_n)_{n>0} \subseteq \mathbb{R}$ définie par*

$$x_n = \frac{n}{n^p+n}$$

où le paramètre p est un réel strictement positif. Étudiez la convergence de $(x_n)_{n>0}$ en fonction de p. Lorsque $(x_n)_{n>0}$ converge, donnez la valeur de sa limite.

On va montrer que

$$\text{si } p \in]0,1[,\ x_n \to 1, \qquad \text{si } p = 1,\ x_n \to 1/2, \qquad \text{et} \qquad \text{si } p \in]1,+\infty[,\ x_n \to 0$$

<u>$p \in]0,1[$.</u> On réécrit x_n comme $x_n = \dfrac{n}{n(n^{p-1}+1)} = \dfrac{1}{n^{p-1}+1}$. Comme $p-1<0$, $n^{p-1} \to 0$ (vu au cours) et par les règles sur les sommes et quotients de suites, on déduit que

$$x_n = \frac{1}{n^{p-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{0+1} = 1$$

<u>$p = 1$.</u> La suite devient $x_n = n/(2n) = 1/2$. Comme c'est la suite constante $(1/2)_{n>0}$, elle converge vers $1/2$.

<u>$p \in]1,+\infty[$.</u> On réécrit x_n comme $x_n = \dfrac{n}{n^p(1+n^{1-p})} = n^{1-p}\dfrac{1}{1+n^{1-p}}$. Puisque $1-p<0$, on a $n^{1-p} \to 0$. Les règles sur les sommes et quotients de suites impliquent que $1/(1+n^{1-p}) \to 1/(1+0) = 1$. De la règle sur la limite d'un produit, on conclut alors que

$$x_n = n^{1-p}\frac{1}{1+n^{1-p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\cdot 1 = 0$$

Question 7. *Soient $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ deux normes. Prouvez que les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

$$\exists C \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad C^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \tag{5}$$

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \text{ et } C_2\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \tag{6}$$

<u>(5) $\Rightarrow$ (6).</u> Prenons $C_1 := C_2 := C^{-1} > 0$ où C est donné par (5). Soit $x \in \mathbb{R}^N$. L'inégalité $C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$ n'est rien d'autre que la première inégalité de (5). Quant à $C^{-1}\|x\|_2 = C_2\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$, elle est équivalente à $\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$, ce qui est la seconde inégalité de (5).

<u>(6) $\Rightarrow$ (5).</u> Prenons $C := \big(\min\{C_1, C_2\}\big)^{-1} = \max\{C_1^{-1}, C_2^{-1}\} > 0$ où C_1 et C_2 sont ceux donnés par (6) (la seconde égalité a lieu car la fonction $\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0} : \xi \mapsto \xi^{-1}$ est décroissante). Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Puisque $C^{-1} = \min\{C_1, C_2\} \leqslant C_1$, on déduit de $C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$ que $C^{-1}\|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$, c'est-à-dire la première inégalité de (5). Similairement, vu que $C = \max\{C_1^{-1}, C_2^{-1}\} \geqslant C_2^{-1}$, on déduit de $C_2\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$ que $\|x\|_2 \leqslant C_2^{-1}\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_1$, ce qui est la seconde inégalité de (5).

Question 8.

(a) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le suprémum de A ».*

a est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire :

- a est majorant : $\forall x \in A,\ x \leqslant a$;
- a est le plus petit : $\forall a' \in \mathbb{R},\ (\forall x \in A,\ x \leqslant a') \Rightarrow a \leqslant a'$.

(b) *Calculez* $\sup(]0,1[\cup]3,\pi[)$. *Justifiez votre réponse à l'aide de la définition donnée en (a).*

Montrons que $\sup(]0,1[\cup]3,\pi[) = \pi$.

<u>π majore $]0,1[\cup]3,\pi[$.</u> En effet, si $x \in]0,1[\cup]3,\pi[$,

- soit $x \in]0,1[$ et alors $x \leqslant 1 \leqslant \pi$;

- soit $x \in]3,\pi[$ et alors $x < \pi$, donc en particulier $x \leqslant \pi$.

<u>π est le plus petit.</u> Soit $a' \in \mathbb{R}$ un majorant de $]0,1[\cup]3,\pi[$. Comme, pour tout $n > 0$, $\pi - 1/(10n) \in]3,\pi[\subseteq]0,1[\cup]3,\pi[$ (en effet $\pi - 1/(10n) < \pi$ et $\pi - 0{,}1/n \geqslant \pi - 0{,}1 > 3{,}04 > 3$), on a

$$\forall n > 0, \quad \pi - \frac{1}{10n} \leqslant a'$$

Vu que $\pi - 1/(10n) \to \pi$ et que les inégalités larges sont préservées par passage à la limite, on en déduit que $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi - 1/(10n) \leqslant \lim_{n\to\infty} a' = a'$. Donc π est bien plus petit que tout majorant a'.

(c) *Posons $A := \{x \in \mathbb{R} : \cos x > 0\}$. Existe-t-il un $a \in \mathbb{R}$ qui soit le suprémum de A ? Prouvez votre réponse et énoncez clairement les résultats que vous utilisez.*

Non. Nous allons montrer que A ne possède pas de majorant, donc a fortiori pas de suprémum.

Supposons au contraire que $a \in \mathbb{R}$ majore A. Quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on a $2k\pi \in A$ puisque $\cos(2k\pi) = \cos(0) = 1 > 0$. Dès lors, on doit avoir

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad 2k\pi \leqslant a$$

ou encore $\forall k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant a/(2\pi)$. Ceci implique la contradiction $\lceil a/(2\pi)\rceil + 1 \leqslant a/(2\pi)$ — en prenant $k = \lceil a/(2\pi)\rceil + 1$. On ne pouvait donc pas supposer l'existence d'un majorant.

Question 9. *On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par la récurrence suivante :*

$$x_0 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad \textit{pour } n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

(a) *Prouvez, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.*

- Cas de base ($n = 0$) : $x_0 = 2 > 0$ est vrai.
- On suppose que $\forall n \leqslant m,\ x_n > 0$, et on va montrer que $x_{m+1} > 0$. Comme $x_m > 0$, on a que $2/x_m$ est bien défini et > 0, donc $x_m + 2/x_m > 0$ (comme somme de termes > 0), donc que que $x_{m+1} = \frac{1}{2}(x_m + 2/x_m) > 0$.

(b) *Prouvez, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 \geqslant 2$.*

- Cas de base ($n = 0$) : $x_0^2 = 2^2 = 4 \geqslant 2$.
- On suppose que $\forall n \leqslant m,\ x_n^2 \geqslant 2$, et on va montrer que $x_{m+1}^2 \geqslant 2$. En utilisant la définition par récurrence (7), on a

$$\begin{aligned} x_{m+1}^2 \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(x_m + \frac{2}{x_m}\right)^2 \geqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_m^2 + 4 + \frac{4}{x_m^2} \geqslant 8 \\ &\Leftrightarrow \quad x_m^2 - 4 + \frac{4}{x_m^2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x_m - \frac{2}{x_m}\right)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Comme la dernière inégalité est vraie (un carré est toujours positif), on a bien établi que $x_{m+1}^2 \geqslant 2$.

(c) *Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Il faut montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (7), on a

$$x_{n+1} \leqslant x_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big) \leqslant x_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x_n} \leqslant 2x_n - x_n \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant x_n^2$$

(pour la dernière équivalence, on a multiplié les deux membres de l'inégalité par x_n, ce qui ne change pas son sens cas $x_n > 0$). On a montré au point (b) que $x_n^2 \geqslant 2$; donc les équivalences ci-dessus montrent qu'on a aussi $x_{n+1} \leqslant x_n$.

(d) *Déduisez des points précédents que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (au sens strict).*

Les points (a) et (b) impliquent que $x_n \geqslant \sqrt{2}$. Vu que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (point (c)) et minorée (par $\sqrt{2}$), elle converge vers un nombre réel (théorème vu au cours).

(e) *Calculez la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifiez.*

Appelons $a \in \mathbb{R}$ la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, comme $x_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout n et que le passage à la limite conserve les inégalités larges, on a $a = \lim x_n \geqslant \sqrt{2}$. Par conséquent $a \neq 0$ et le règle de limite d'un quotient implique que $2/x_n \to 2/a$. D'autre part, puisque $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers la même limite a. Dès lors, en passant à la limite sur l'égalité $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{2}{x_n}\big)$ (et en utilisant les règles sur les limites de sommes et de produits), on trouve que $a = \frac{1}{2}\big(a + \frac{2}{a}\big)$. Cette dernière égalité se réécrit $2a = a + \frac{2}{a}$ ou encore $a^2 = 2$. Cette équation possède les deux solutions $a = \sqrt{2}$ et $a = -\sqrt{2}$ mais, comme on sait que $a \geqslant \sqrt{2}$, la seule possibilité est que $a = \sqrt{2}$.

En conclusion $x_n \to \sqrt{2}$.