Analyse mathématique I

Coté (7 mars 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$. Prouvez que, si f est dérivable en a, alors f est continue en a. Énoncez clairement les définitions que vous utilisez. /5

Analyse mathématique I

Coté (7 mars 2005)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ______

Question 2. Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chacune de vos réponses par un bref argument ou un contre-exemple.

/10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite ne converge pas vers $+\infty$, elle est bornée.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $a^* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est le suprémum de A, alors il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ telle que $a_n \to a^*$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ telle que $x_n \to 0$. Alors $1/x_n \to +\infty$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble borné. Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ converge vers un $x^* \in \mathbb{R}$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une suite qui n'est pas croissante est décroissante.

Analyse mathématique I

Coté (7 mars 2005)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3.

$/4$

- Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique (en expliquant le lien entre l'énoncé et le graphique).

- En utilisant ce théorème, démontrez que, si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) = 0$, alors f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Analyse mathématique I

Coté (7 mars 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons $\Omega =]-\infty, a[$. Dites si Ω est fermé et/ou ouvert. Donnez une définition de chacun de ces deux concepts et employez celles-ci pour démontrer vos affirmations. $/5$

Analyse mathématique I

Coté (7 mars 2005)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ______

Question 5.

/10

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a »,

  (a) en termes de suites :

  (b) en ε-δ :

- Montrez, grâce à la définition (b) que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + x$ est continue en 1.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite).

- Soient les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h :]-1,0[\cup]0,1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Représentez graphiquement g et h sur les figures ci-dessous.

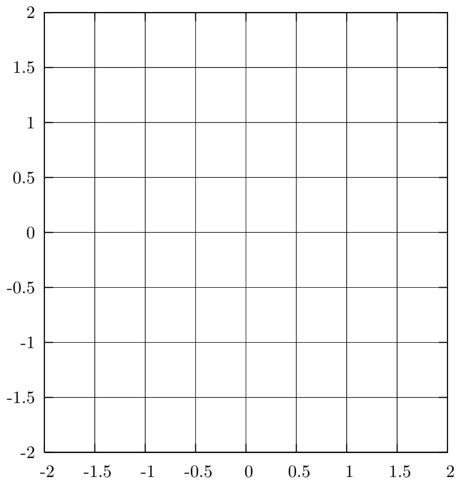

FIG. 1 – Graphe de g

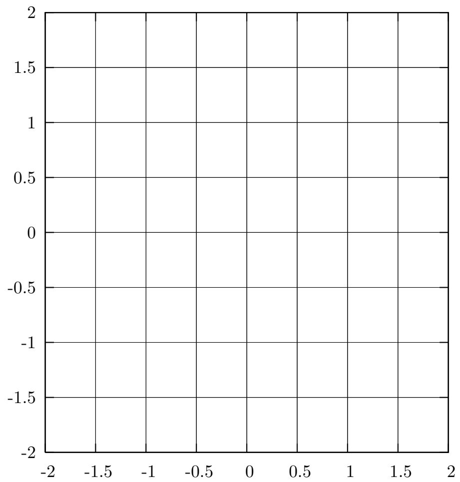

FIG. 2 – Graphe de h

Pour chacune de ces deux fonctions, précisez en quel(s) point(s) elle est continue et en quel(s) point(s) elle ne l'est pas. Justifiez à partir de la définition (a) donnée ci-dessus.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 6. Quels sont (s'il y en a) tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés. Prouvez votre affirmation. /4

Analyse mathématique I

Coté (7 mars 2005)

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 7. Soit $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

- Définissez « $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement de Ω ».

- Complétez la proposition suivante de manière à ce qu'elle soit vraie.

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad x \in \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \Leftrightarrow \boxed{}, \ x \in O_\alpha.$$

- Montrez que la famille $\left(\left] \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right[\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est un recouvrement de $]0,1[$. (Une interprétation graphique est appréciée mais ne suffit pas.)