Analyse mathématique I

Coté (7 mars 2005) **Correction**

Question 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$. Prouvez que, si f est dérivable en a, alors f est continue en a. Énoncez clairement les définitions que vous utilisez.*

La réponse à cette question se trouve textuellement dans le syllabus.

Question 2. *Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chacune de vos réponses par un bref argument ou un contre-exemple.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Si une suite ne converge pas vers $+\infty$, elle est bornée.*

Par exemple, la suite $(x_n) = (-n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $+\infty$ et n'est pas bornée (ces deux faits découlent de $x_n \to -\infty$).

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $a^* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est le suprémum de A, alors il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ telle que $a_n \to a^*$.*

Ceci a été montré au cours. Si $a^* \in \mathbb{R}$, ceci découle d'une définition équivalente du suprémum. Si $a^* = +\infty$, alors A est non borné supérieurement et on peut trouver $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ qui converge vers $+\infty$.

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ telle que $x_n \to 0$. Alors $1/x_n \to +\infty$.*

En effet, $x_n := -1/n \to 0$ mais $1/x_n = -n \to -\infty$.

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble borné. Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ converge vers un $x^* \in \mathbb{R}$.*

Un exemple est $A = [-1, 1]$, $(x_n) = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, $(x_n) \subseteq A$ puisque, pour tout n, $|x_n| \leqslant 1$ mais (x_n) ne converge pas.

(e) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Une suite qui n'est pas croissante est décroissante.*

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (-1)^n$ n'est pas croissante (puisque $x_0 = 1 > x_1 = -1$) mais elle n'est pas pour autant décroissante (car $x_1 = -1 < x_2 = 1$).

Question 3.

- *Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique (en expliquant le lien entre l'énoncé et le graphique).*

  Cette partie a été faite au cours théorique et se trouve dans le syllabus.

- *En utilisant ce théorème, démontrez que, si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) = 0$, alors f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.*

  Ceci est fait dans le syllabus (sous des hypothèses légèrement plus faibles) et avait été laissé en exercice (le cas « $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) \geqslant 0$ implique f croissante » ayant été fait au cours).

Question 4. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons $\Omega = \left]-\infty, a\right[$. Dites si Ω est fermé et/ou ouvert. Donnez une définition de chacun de ces deux concepts et employez celles-ci pour démontrer vos affirmations.*

Ω n'est pas fermé. En effet, une des définitions de fermeture dit que, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ est fermé si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall (x_n) \subseteq \Omega, \quad x_n \to x \Rightarrow x \in \Omega. \tag{1}$$

Or, la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $a - 1/n$ est bien dans Ω (puisque, quel que soit $n \geqslant 1$, on a $x_n < a$) et vérifie $x_n \to a$. Par conséquent, (1) n'est pas vérifiée car, en prenant $x = a$ et cette suite, on obtient que la prémisse de l'implication est vraie alors que sa conclusion, $x \in \Omega$ ne l'est pas (vu que $a \notin \Omega$).

Ω est ouvert. Nous allons montrer que la définition suivante de « Ω est ouvert » est vraie :

$$\forall x \in \Omega,\ \exists \rho > 0, \quad \mathrm{B}(x, \rho) \subseteq \Omega. \tag{2}$$

Il est bon de se rappeler que, dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{B}(x,\rho) = \left]x-\rho, x+\rho\right[$. Soit $x \in \Omega$. On prend $\rho := a - x$. On a bien que $\rho > 0$ car $x \in \Omega$ veut dire $x < a$. Reste à prouver que $\left]x-\rho, x+\rho\right[\subseteq \Omega$. Soit $y \in \left]x-\rho, x+\rho\right[$. On a $y < x + \rho = x + a - a = a$ ce qui établit que $y \in \Omega$.

Question 5.

- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a »,*

  (a) *en termes de suites :*

  $$\forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f, \quad x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

  (b) *en ε-δ :*

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f, \quad |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

- *Montrez, grâce à la définition (b) que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + x$ est continue en 1.*

  Il faut établir que

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| \leqslant \delta \Rightarrow |x^2 + x - 2| \leqslant \varepsilon$$

  Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta := \min\{\sqrt{\varepsilon/2}, \varepsilon/6\}$. On a bien que $\delta > 0$ vu que c'est le minimum de deux quantités > 0. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| \leqslant \delta$. On a

  $$\begin{aligned} |x^2 + x - 2| &= |(x-1)(x+2)| = |x-1|\,|x+2| \\ &= |x-1||x-1+3| \leqslant |x-1|^2 + 3|x-1| \leqslant \delta^2 + 3\delta \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

  où la dernière inégalité découle du fait que $\delta \leqslant \sqrt{\varepsilon/2}$ et donc $\delta^2 \leqslant \varepsilon/2$ et $\delta \leqslant \varepsilon/6$ d'où $3\delta \leqslant \varepsilon/2$.

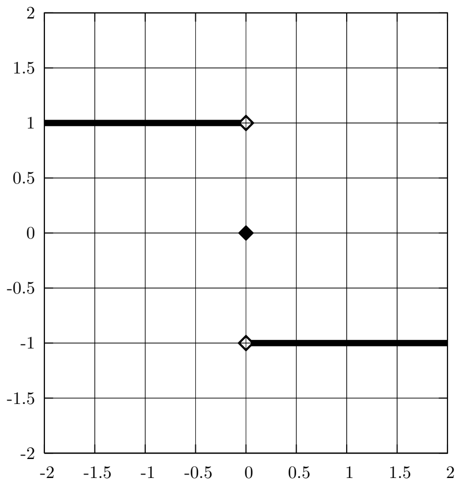

FIG. 1 – Graphe de g

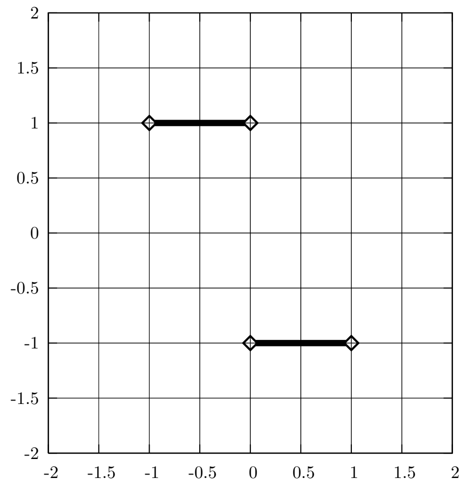

FIG. 2 – Graphe de h

- *Soient les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h :]-1,0[\cup]0,1[\to \mathbb{R}$ définies par*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ -1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Représentez graphiquement g et h sur les figures 1 et 2.

Pour chacune de ces deux fonctions, précisez en quel(s) point(s) elle est continue et en quel(s) point(s) elle ne l'est pas. Justifiez à partir de la définition (a) donnée ci-dessus.

g n'est pas continue en 0. En effet, $x_n := 1/n \to 0$ et pourtant $g(x_n) = 1 \not\to g(0) = 0$.

g est continue en tout point $a \neq 0$. En effet, si $a > 0$ et que (x_n) converge vers a, il existe un n_0 tel que $x_n > 0$ pour $n \geqslant n_0$ (car, pour le dire brièvement, $]0+\infty[$ est ouvert). Dès lors, $g(x_n) = -1$ pour $n \geqslant n_0$ et on a $g(x_n) \to -1 = g(a)$ (seule la queue de la suite importe pour la limite).

Si $a < 0$, on a par un raisonnement similaire que $g(x_n) \to 1 = g(a)$ pour toute suite (x_n) qui converge vers a.

h est continue en tout point de son domaine. Si $a \in]0,1[$ et que $x_n \to a$, alors il existe un n_0 tel que $x_n \in]0,1[$ pour $n \geqslant n_0$ (car $]0,1[$ est ouvert). Dès lors $h(x_n) = -1$ pour $n \geqslant n_0$ et $h(x_n) \to h(a) = -1$.

Le cas $a \in]-1,0[$ est similaire.

REMARQUE : Il n'y a pas lieu de s'intéresser à 0 car $0 \notin \mathrm{Dom}\, f$.

Question 6. *Quels sont (s'il y en a) tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés. Prouvez votre affirmation.*

Les deux *seuls* sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$. Le fait que $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ (qui sont le complémentaire l'un de l'autre) soient tous deux ouverts *et* fermés a été montré en exercices. Il reste à voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Supposons donc que Ω soit ouvert et fermé et différent de $\varnothing$ et $\mathbb{R}$. Puisque $\Omega \neq \varnothing$, on peut prendre un $a \in \Omega$. Comme $\Omega \neq \mathbb{R}$, il existe au moins un $b \in \mathbb{R} \setminus \Omega = \complement\Omega$. Sans perte de généralité, on peut supposer $a \leqslant b$ (si $a > b$, on échange Ω et $\complement\Omega$ qui sont tous deux ouverts et fermés). Définissons

$$c = \sup\bigl(\Omega \cap [a,b]\bigr)$$

Puisque $\Omega \cap [a,b]$ n'est pas vide (il contient a) et est borné supérieurement par b, on a $c \in \mathbb{R}$. En fait, vu que le supémum appartient à la fermeture de l'ensemble et que $\Omega \cap [a,b]$ est fermé (comme intersection de deux fermés), on a

$$c \in \Omega \cap [a,b].$$

Il n'est pas possible que $c = b$ car $b \in \complement\Omega$. Donc[1] $c \in \Omega \cap \left]-\infty, b\right[$. Vu que ce dernier ensemble est ouvert (comme intersection de deux ouverts), il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\left]c-\varepsilon, c+\varepsilon\right[\subseteq \Omega \cap \left]-\infty, b\right[$. Mais alors $c + \frac{1}{2}\varepsilon \in \Omega \cap [a,b]$ ce qui contredit le fait que c est un majorant de cet ensemble.

Question 7. *Soit $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.*

- *Définissez « $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un recouvrement de Ω ».*

$$\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \supseteq \Omega$$

- *Complétez la proposition suivante de manière à ce qu'elle soit vraie.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad x \in \bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha \Leftrightarrow \boxed{\exists \alpha \in A}, \ x \in O_\alpha.$$

- *Montrez que la famille $\left(\left]\dfrac{1}{n+2}, \dfrac{1}{n}\right[\right)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est un recouvrement de $\left]0,1\right[$. (Une interprétation graphique est appréciée mais ne suffit pas.)*

  Soit $x \in \left]0,1\right[$. Il faut montrer que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right[$, c'est-à-dire, au vu du second point, que

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad x \in \left]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right[$$

  Prenons $n := \lceil \frac{1}{x} \rceil - 1$. Puisque $x > 0$, $1/x > 0$ et a un sens. De plus, comme $x < 1$, $1/x > 1$ d'où $\lceil \frac{1}{x} \rceil \geqslant 2$. Par conséquent $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Il reste à établir que

$$\frac{1}{n+2} < x < \frac{1}{n} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad n < \frac{1}{x} < n+2$$

[1] Par contre, il n'est pas à priori exclu que $c = a$. On pourrait donc dire $c \in \Omega \cap \left[a, b\right[$ mais cet ensemble n'est pas nécessairement ouvert... On devrait alors traiter à part le cas $c = a$. L'argument développé évite de le faire.

C'est bien le cas car, par définition de la partie entière supérieure, on a $\lceil \xi \rceil - 1 < \xi \leqslant \lceil \xi \rceil$. Appliquées à $\lceil \frac{1}{x} \rceil = n+1$, ces inégalités deviennent

$$n < \frac{1}{x} \leqslant n+1$$

d'où il vient que $n < 1/x < n+2$.