Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a » et termes de ε-δ *et* en termes de suites.

(b) En utilisant la définition en ε-δ donnée en (a), prouvez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en $x = 1$. (La qualité de la rédaction est importante.)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 1 (suite).

(c) Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies par

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2-x & \text{si } x > 1 \\ \text{pas définie} & \text{si } x \in [-1,0[\cup]0,1] \end{cases}$$

Tracez le graphe de g sur la figure 1 (resp. de h sur la figure 2). Dites si g et h sont des fonctions continues (sur leur domaine de définition). Justifiez vos réponses à partir de la définition du point (a) que vous désirez.

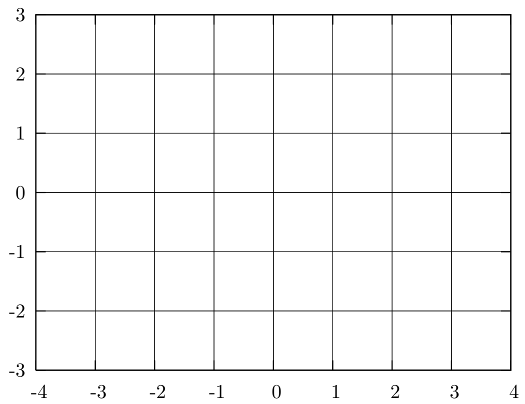


FIG. 1 – Graphe de g

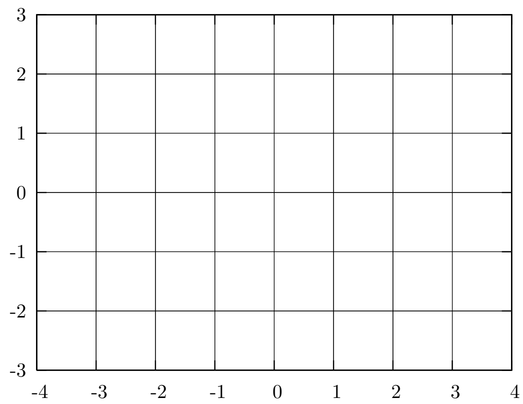


FIG. 2 – Graphe de h

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(x) = x^2 + o(x^2) \quad \text{quand } x \xrightarrow{\neq} 0.$$

Prouvez que

(a) $f(0) = 0$;

(b) 0 est un minimum local de f (veuillez rappeler la définition de cette propriété) ;

(c) $\partial f(0)$ existe et vaut 0.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 3.

(a) Énoncez le théorème de la moyenne.

(b) Donnez une interprétation géométrique de ce théorème en expliquant la relation avec l'énoncé donné en (a).

(c) Montrez que toute fonction périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ possède une infinité de points critiques. (Pour rappel, on dit que f est périodique si $\exists \tau > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+\tau)$.)

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :

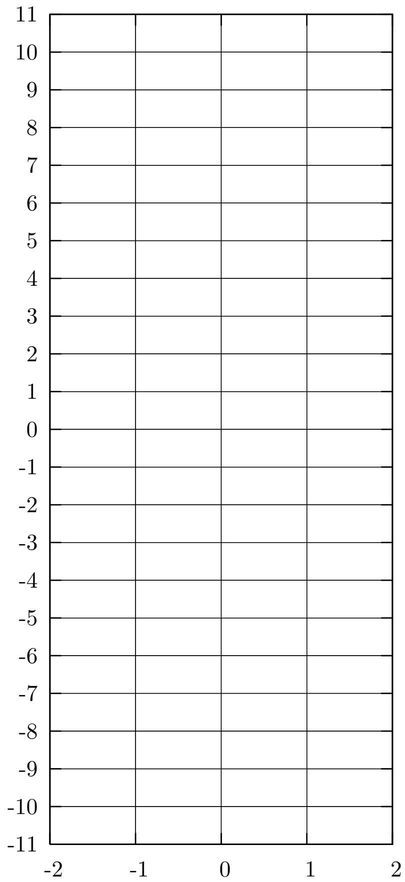
Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Rappelons que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, on définit $f(A) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A,\ y = f(x)\}$.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ et $A = [0, 2]$.

- Sur la figure ci-contre, esquissez le graphe de f, A et $f(A)$.
- Déterminez $f(A)$ par calcul.



- Calculez $\sup f(A)$ et $f(\sup A)$. Énoncez les résultats éventuellement utilisés.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Mathématique

Question 4 (suite).

(b) Prouvez que, quels que soient la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue et l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné supérieurement, on a $\sup f(A) = f(\sup A)$.

(c) Donnez un exemple qui montre que la propriété (b) n'est pas nécessairement vérifiée si f n'est pas continue.

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Calculez le développement de Taylor d'ordre 2 en $x = \pi/2$, avec reste, de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\, \mathrm{e}^{\sin x}$$

Réponse finale : $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Quantificateurs éventuels}}$

$$f(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Développement de Taylor}} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Reste}}$$

Détaillez ci-dessous vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 6. Donnez toutes les solutions réelles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ de l'équation

$$\partial_t^2 u + \partial_t u - 2u = \operatorname{sh} t$$

RAPPEL : $\operatorname{sh} x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 6 (suite). Continuez votre réponse sur cette page, si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Montrez que

(a) toutes les tangentes au graphe de f (en n'importe quelle abcisse) passent par $(0,0)$

si et seulement si

(b) f est la fonction $x \mapsto cx$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Veillez à la qualité des justifications fournies.
INDICATION : Pour (a) $\Rightarrow$ (b), commencez par écrire l'équation qui exprime (a).

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 8. Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\partial_t^2 x + x = \sin(\partial_t x) + \mathrm{e}^t \tag{1}$$

où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donnez une équation de la forme

$$\partial_t u = F(t, u) \tag{2}$$

où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est l'inconnue et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est à déterminer, de manière à ce que les solutions de (1) et de (2) se correspondent. Expliquez en quoi consiste cette correspondance (i.e., quelle est la bijection entre les ensembles de solutions x et u).

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et barrer la section inutile sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a » et termes de ε-δ *et* en termes de suites.

(b) En utilisant la définition en ε-δ donnée en (a), prouvez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en $x = 1$. (La qualité de la rédaction est importante.)

INDICATION : L'identité suivante peut vous aider : $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 1 (suite).

(c) Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies par

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2-x & \text{si } x > 1 \\ \text{pas définie} & \text{si } x \in [-1,0[\cup]0,1] \end{cases}$$

Tracez le graphe de g sur la figure 1 (resp. de h sur la figure 2). Dites si g et h sont des fonctions continues (sur leur domaine de définition). Justifiez vos réponses à partir de la définition du point (a) que vous désirez.

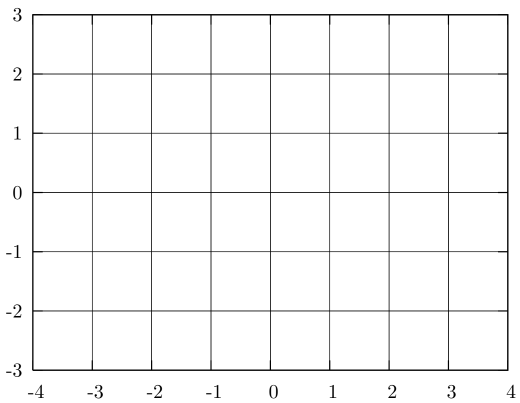


FIG. 1 – Graphe de g

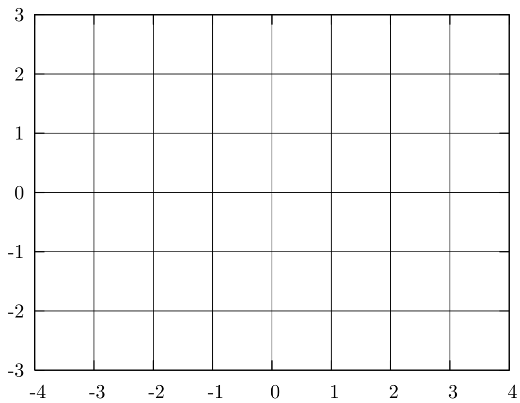


FIG. 2 – Graphe de h

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 2.

(a) Énoncez le théorème de la moyenne.

(b) Donnez une interprétation géométrique de ce théorème en expliquant la relation avec l'énoncé donné en (a).

(c) Montrez que toute fonction périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ possède une infinité de points critiques. (Pour rappel, on dit que f est périodique si $\exists \tau > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x + \tau)$.)

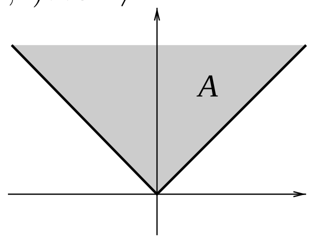
Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ l'ensemble défini par $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant |x_1|\}$ et représenté ci-après. Pour chacune des propriétés suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Argumentez votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists x \in \mathbb{R}^2,\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x, r) \cap A \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x, r) \cap \complement A \neq \varnothing$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ (\exists r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x, r) \subseteq A) \Rightarrow x \in A$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x, r) \subseteq A$



Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 4.

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est fermé » en terme de boule.

(b) Utilisez cette définition pour montrer que

- $[0,1]$ est fermé ;
- $[0,1[$ n'est pas fermé.

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 5. Calculez le développement de Taylor d'ordre 2 en $x = \pi/2$, avec reste, de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\sin x}$$

Réponse finale : $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Quantificateurs éventuels}}$

$$f(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Développement de Taylor}} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Reste}}$$

Détaillez ci-dessous vos calculs.

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 6. Donnez toutes les solutions réelles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ de l'équation

$$\partial_t^2 u + \partial_t u - 2u = \operatorname{sh} t$$

RAPPEL : $\operatorname{sh} x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 6 (suite). Continuez votre réponse sur cette page, si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :

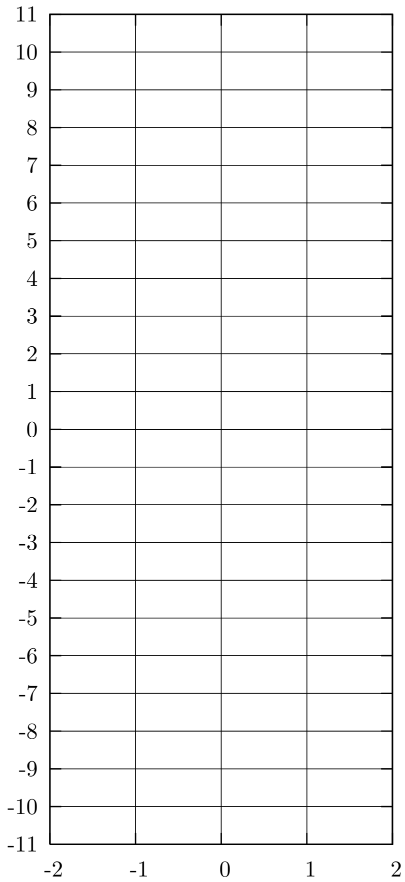
Prénom :

Section : Info / Phys

Question 7. Rappelons que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, on définit $f(A) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A,\ y = f(x)\}$.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ et $A = [0,2]$.

- Sur la figure ci-contre, esquissez le graphe de f, A et $f(A)$.
- Déterminez $f(A)$ par calcul.



- Calculez $\sup f(A)$ et $f(\sup A)$. Énoncez les résultats éventuellement utilisés.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 7 (suite).

(b) Prouvez que, quels que soient la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue et l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné supérieurement, on a $\sup f(A) = f(\sup A)$.

INDICATION : Si $A \neq \varnothing$, alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup A$.

(c) Donnez un exemple qui montre que la propriété (b) n'est pas nécessairement vérifiée si f n'est pas continue.

Analyse mathématique I

Examen (7 juin 2005)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 8. Calculez les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_3^4 \frac{5}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ en utilisant le changement de variable $x = \operatorname{sh} y$.

  RAPPELS : $\operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})$, $\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})$ et $\mathrm{e}^{-y} = 1/\mathrm{e}^y$.