Analyse mathématique I

Examen (Math) (7 juin 2005)

Correction

Les réponses ci-dessous montrent *une* solution possible pour chacune des questions posées. D'autres résolutions sont possibles (pour savoir si la votre est correcte, veuillez consulter la correction de vos copies).

La rédaction a été faite avec le souci des détails. Il n'est pas nécessaire que la votre soit aussi précise (comme d'habitude, nous avons besoin des éléments qui nous permettent de suivre et de juger de la pertinence de chacune des étapes de votre raisonnement).

Question 1.

(a) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a » et termes de ε-δ* et *en termes de suites.*

En ε-δ : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$

En terme de suites : $\forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f,\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

(b) *En utilisant la définition en ε-δ donnée en (a), prouvez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en $x = 1$. (La qualité de la rédaction est importante.)*

Il faut montrer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [0, +\infty[, \quad |x-1| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| = |\sqrt{x} - 1| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta := \varepsilon$. Soit $x \in [0, +\infty[$ tel que $|x - 1| \leqslant \delta$. Montrons que $|\sqrt{x} - \sqrt{1}| \leqslant \varepsilon$. C'est le cas car

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{1}\right| &= \left|\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1}}\right| && \text{(multiplication et division par } \sqrt{x}+\sqrt{1}\text{)} \\ &= \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} && (|x-1| \leqslant \delta \text{ par hypothèse et } \sqrt{x}+1 \geqslant 1) \\ &\leqslant \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

(c) *Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies par*

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 - x & si\ x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 2 + x & si\ x < -1 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 2 - x & si\ x > 1 \\ \textit{pas définie} & si\ x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \end{cases}$$

Tracez le graphe de g sur la figure 1 (resp. de h sur la figure 2). Dites si g et h sont des fonctions continues (sur leur domaine de définition). Justifiez vos réponses à partir de la définition du point (a) que vous désirez.

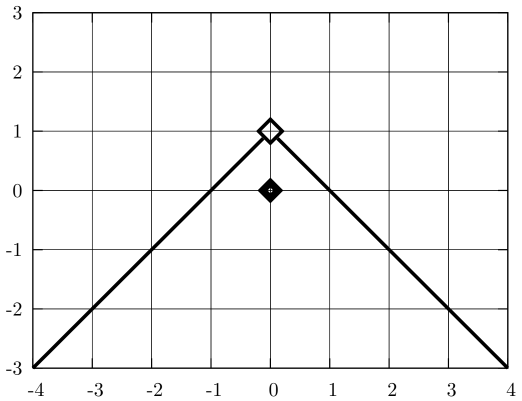


FIG. 1 – Graphe de g

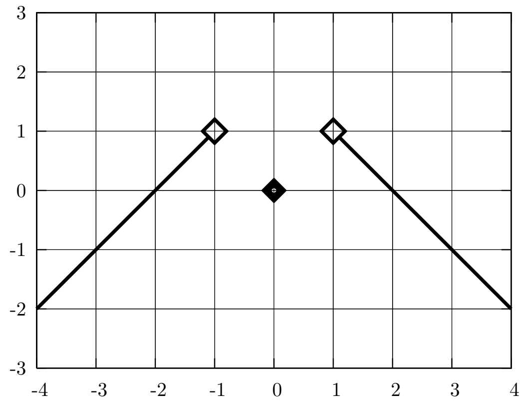


FIG. 2 – Graphe de h

- Nous allons montrer que la fonction g n'est pas continue en 0 et, par conséquent, pas continue sur son domaine de définition. Pour ce faire, considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par $\forall n > 0,\ x_n := 1/n$. On a $x_n \to 0$ et, en tenant compte du fait que $x_n > 0$ quel que soit n, $f(x_n) = 1 - x_n \to 1 \neq f(0) = 0$. Ceci contredit la définition de « f continue en 0 » en termes de suites.
- La fonction h *est* continue sur son domaine de définition. Nous allons montrer la continuité de h en a en distinguant les trois cas $a \in \left]-\infty,-1\right[$, $a = 0$, et $a \in \left]1,+\infty\right[$.
  - Soit $a \in \left]-\infty,-1\right[$ et $x_n \to a$. Comme $\left]-\infty,-1\right[$ est ouvert, la suite fini par y rentrer i.e., il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \in \left]-\infty,-1\right[$. Par conséquent, $h(x_n) = 2 + x_n \xrightarrow[n\to\infty,\ n\geqslant n_0]{} 2 + a = h(a)$. Donc $h(x_n) \to h(a)$ — puisque la convergence de la queue d'une suite est équivalente à la convergence de celle-ci.
  - Le cas où $a \in \left]1,+\infty\right[$ est tout à fait similaire et est laissé au lecteur.
  - Reste $a = 0$. Montrons que toute suite $(x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f$ qui converge vers 0 est ultimement constante, c'est-à-dire que, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant n_0,\ x_n = 0$. En effet, dans la définition de $x_n \to 0$, prenons $\varepsilon = 1/2$. Nous obtenons qu'il existe un n_0 (c'est celui que nous cherchons) tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |x_n| = |x_n - 0| \leqslant 1/2$. Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \in [-1/2, 1/2] \cap \operatorname{Dom} f = \{0\}$ et donc $x_n = 0$. Dès lors, pour tout $n \geqslant n_0$, $h(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty,\ n\geqslant n_0]{} 0 = h(0)$ et la continuité en 0 est prouvée.

Question 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$f(x) = x^2 + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{quand } x \xrightarrow{\neq} 0.$$

Prouvez que

(a) $f(0) = 0$;

(b) 0 *est un minimum local de* f ;

(c) $\partial f(0)$ *existe et vaut* 0.

(a) Rappelons que, par définition, $\mathrm{o}(x^2)/x^2 \to 0$ lorsque $x \xrightarrow{\neq} 0$. Dès lors

$$f(x) = x^2 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} \cdot x^2 \xrightarrow[x \xrightarrow{\neq} 0]{} 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

Comme f est supposée continue, $f(0) = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} f(x) = 0$.

(b) Il faut prouver qu'il existe un voisinage V de 0 tel que

$$\forall x \in V, \quad f(0) \leqslant f(x).$$

Posons $g(x) := f(x) - x^2$. Comme $g(x)/x^2 \xrightarrow[x \to 0,\ x \neq 0]{} 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall x \neq 0,\ |x - 0| < \delta \Rightarrow |g(x)/x^2 - 0| \leqslant 1/2$. Posons $V := \left]-1/2, 1/2\right[$. Ce qu'on vient de dire peut s'écrire comme

$$\forall x \in V \setminus \{0\}, \quad -\tfrac{1}{2}x^2 \leqslant g(x) \leqslant \tfrac{1}{2}x^2$$

Par conséquent,

$$\forall x \in V \setminus \{0\}, \quad f(x) = x^2 + g(x) \geqslant x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}x^2 \geqslant 0 = f(0)$$

Bien entendu, on a aussi $f(0) \geqslant f(0)$ et donc $\forall x \in V$, $f(x) \geqslant f(0)$ ce qui prouve que 0 est un minimum (strict) sur le voisinage[1] V de 0.

(c) En vertu de la définition de dérivée, on a

$$\begin{aligned}
\partial f(0) &= \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{x} \\
&= \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \left(x + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} x \right) = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} x + \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} x = 0 + 0 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

REMARQUE : On ne peut utiliser le résultat qui dit que la dérivée s'annule en un minimum local que si on sait, à priori, que f est dérivable en 0 (ce qui n'est pas le cas ici).

Question 3.

(a) *Énoncez le théorème de la moyenne.*

Cf. syllabus.

(b) *Donnez une interprétation géométrique de ce théorème en expliquant la relation avec l'énoncé donné en (a).*

Cf. syllabus.

(c) *Montrez que toute fonction périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ possède une infinité de points critiques. (Pour rappel, on dit que f est périodique si $\exists \tau > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x + \tau)$.)*

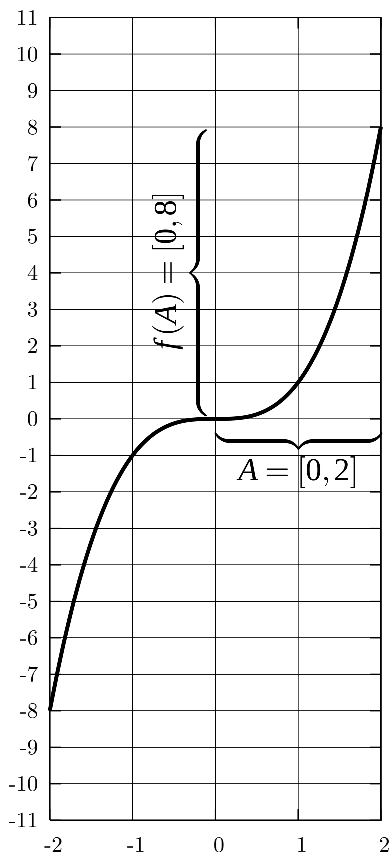
[1] V est un ouvert tel que $V \ni 0$, c'est donc un voisinage 0.

Considérons f sur l'intervalle $[0,\tau]$ où $\tau > 0$ est la période.[2] Le théorème de la moyenne affirme qu'il existe un $\xi \in]0,\tau[$ tel que $f(\tau) - f(0) = \partial f(\xi)(\tau - 0)$. La périodicité implique que $f(\tau) = f(0)$ et donc que $\partial f(\xi) = 0$. D'autre part, comme les fonctions $x \mapsto f(x+\tau)$ et $x \mapsto f(x)$ sont égales, leurs dérivées (qui existent par hypothèse) le sont aussi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\partial_x\big(f(x+\tau)\big) = (\partial f)(x+\tau) = \partial f(x)$ — autrement dit, ∂f est périodique de période τ. Par conséquent $\partial f(\xi + n\tau) = \partial f(\xi + (n-1)\tau) = \cdots = \partial f(\xi + 2\tau) = \partial f(\xi + \tau) = \partial f(\xi) = 0$ quel que soit[3] $n \in \mathbb{N}$. Ceci montre que les points (en nombre infini) $\xi + n\tau$, $n \in \mathbb{N}$, sont des points critiques de f.

Question 4. *Rappelons que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, on définit $f(A) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A,\ y = f(x)\}$.*

(a) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ et $A = [0,2]$.*

- *Sur la figure ci-contre, esquissez le graphe de f, A et $f(A)$.*



- *Déterminez $f(A)$ par calcul.*

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [0,2],\ y = x^3\} = [0,8]$$

Pour justifier la dernière égalité, montrons les deux inclusions.

 – $f(A) \subseteq [0,8]$. Soit $y \in f(A)$. Par définition, $y = f(x)$ pour un certain $x \in [0,2]$. Comme $x \mapsto x^3$ est croissante, on déduit de $0 \leqslant x \leqslant 2$ que $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(2) = 8$ i.e., que $y = f(x) \in [0,8]$.

 – $f(A) \supseteq [0,8]$. Soit $y \in [0,8]$. Il faut prouver que $y \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in [0,2]$ tel que $y = f(x)$. Prenons $x := \sqrt[3]{y}$. Comme ci-dessus, on déduit de la croissante de $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ et de $y \in [0,8]$ que $x = \sqrt[3]{y} \in [0,2]$. De plus, $y = f(x)$ car $f(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

- *Calculez $\sup f(A)$ et $f(\sup A)$. Énoncez les résultats éventuellement utilisés.*

On a vu que le suprémum d'un intervalle $[a,b]$ ($a \leqslant b$) est[4] b. Ici, $\sup f(A) = \sup[0,8] = 8$ et $f(\sup A) = f(\sup[0,2]) = f(2) = 2^3 = 8$.

(b) *Prouvez que, quels que soient la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue et l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné supérieurement, on a* $\sup f(A) = f(\sup A)$.

[2] Pour l'argument, il suffit de prendre *un* τ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+\tau)$. On définit *la* période comme $\tau^* := \inf\{\tau > 0 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+\tau)\}$. Comme f est continue, on établit facilement que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+\tau^*)$. De plus, si $\tau^* = 0$, il existe une suite de $\tau_n > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+\tau_n)$ et $\tau_n \to 0$. Par conséquent, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\partial f(x) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s)-f(x)}{s} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\tau_n)-f(x)}{\tau_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\tau_n} = 0$. Donc $\partial f = 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est une fonction constante.

[3] Pouvez-vous montrer qu'en fait $\partial f(\xi + n\tau) = \partial f(\xi) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$?

[4] En effet, $b \in [a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ x \leqslant b$, donc b est le maximum de $[a,b]$, à fortiori le suprémum.

On doit montrer que $f(\sup A)$ est le suprémum de $f(A)$, c'est-à-dire que (selon une des définitions équivalentes du suprémum) :

$$\forall y \in f(A), \quad y \leqslant f(\sup A) \tag{1}$$

$$\exists (y_n) \subseteq f(A), \quad y_n \to f(\sup A) \tag{2}$$

Prouvons (1). Soit $y \in f(A)$. Par définition, il existe un $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Puisque le suprémum est un majorant, on a $x \leqslant \sup A$. Comme f est croissante,[5] on a $y = f(x) \leqslant f(\sup A)$ comme désiré.

Passons à (2). Par définition du suprémum de A, on sait qu'il existe une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $x_n \to \sup A$. Par continuité de f, on a $f(x_n) \to f(\sup A)$. Posons $(y_n) := \big(f(x_n)\big)$. On a bien que $(y_n) \subseteq f(A)$ — puisque, pour tout n, $y_n = f(x_n) \in f(A)$ — et $y_n = f(x_n) \to f(\sup A)$.

(c) *Donnez un exemple qui montre que la propriété (b) n'est pas nécessairement vérifiée si f n'est pas continue.*

Prenons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est croissante et n'est pas continue en 0 (c'est laissé en exercice). Choisissons $A :=]-1, 0[$. On a $\sup A = 0$ (suprémum d'un intervalle, vu au cours). Par ailleurs, comme $A \subseteq]-\infty, 0[$, $f(x) = 0$ pout tout $x \in A$ et donc $f(A) = \{0\}$. Par conséquent $\sup f(A) = \sup\{0\} = 0 \neq f(\sup A) = f(0) = 1$, ce qui montre que (b) n'est pas vérifiée.

Question 5. *Calculez le développement de Taylor d'ordre 2 en $x = \pi/2$, avec reste, de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = x\, \mathrm{e}^{\sin x}$$

Réponse finale : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\exists \xi \in [\pi/2, x]}_{\text{Quantificateurs éventuels}}$

$$f(x) = \underbrace{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e} + \mathrm{e}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2}_{\text{Développement de Taylor}}$$

$$+ \underbrace{\tfrac{1}{6}\big(-3\sin\xi - \xi\cos\xi + 3\cos^2\xi - 3\xi\cos\xi\,\sin\xi + \xi\cos^3\xi\big)\,\mathrm{e}^{\sin\xi}\big(x - \frac{\pi}{2}\big)^3}_{\text{Reste}}$$

Détaillez ci-dessous vos calculs.

[5] Pour rappel, « f croissante » veut dire que, quels que soient x_1 et x_2, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Notons que pour (1), on n'a pas besoin de la continuité de f.

On a vu au cours que, comme f est de classe $\mathscr{C}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \xi \in [\pi/2, x]$,

$$f(x) = f\big(\frac{\pi}{2}\big) + \partial f\big(\frac{\pi}{2}\big)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + \tfrac{1}{2}\partial^2 f\big(\frac{\pi}{2}\big)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 + \tfrac{1}{6}\partial^3 f(\xi)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3 \tag{3}$$

Il faut donc calculer les trois premières dérivées de f et les évaluer aux bons points. Les règles de calcul de dérivées impliquent

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x) &= \big(\partial_x x\big)\,\mathrm{e}^{\sin x} + x\,\partial_x \mathrm{e}^{\sin x} = (1 + x\cos x)\,\mathrm{e}^{\sin x}\\
\partial_x^2 f(x) &= \big(\partial_x(1 + x\cos x)\big)\,\mathrm{e}^{\sin x} + (1+\cos x)\partial_x \mathrm{e}^{\sin x} = (2\cos x - x\sin x + x\cos^2 x)\,\mathrm{e}^{\sin x}\\
\partial_x^3 f(x) &= \big(\partial_x(2\cos x - x\sin x + x\cos^2 x)\big)\,\mathrm{e}^{\sin x} + (2\cos x - x\sin x + x\cos^2 x)\partial_x \mathrm{e}^{\sin x}\\
&= (-3\sin x - x\cos x + \cos^2 x - 2x\cos x\sin x)\,\mathrm{e}^{\sin x} + (2\cos^2 x - x\sin x\cos x + x\cos^3 x)\,\mathrm{e}^{\sin x}\\
&= (-3\sin x - x\cos x + 3\cos^2 x - 3x\cos x\sin x + x\cos^3 x)\,\mathrm{e}^{\sin x}
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $\sin(\pi/2) = 1$ et $\cos(\pi/2) = 0$, on a

$$f\big(\frac{\pi}{2}\big) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}, \qquad \partial_x f\big(\frac{\pi}{2}\big) = \mathrm{e}, \qquad \partial_x^2 f\big(\frac{\pi}{2}\big) = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}\,.$$

et il suffit de remplacer dans (3) pour avoir le résultat.

Question 6. *Donnez toutes les solutions réelles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ de l'équation*

$$\partial_t^2 u + \partial_t u - 2u = \operatorname{sh} t \tag{4}$$

RAPPEL : $\operatorname{sh} x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

- ÉQUATION HOMOGÈNE. Le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à (4) est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. Il possède 1 et -2 comme racines. Les solutions complexes de $\partial_t^2 u + \partial_t u - 2u = 0$ sont donc
$$\alpha\,\mathrm{e}^t + \beta\,\mathrm{e}^{-2t} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$
Comme (4) est à coefficients réels, on a vu qu'on obtient toutes les solutions réelles en prenant la partie réelle des solutions complexes, ce qui donne :
$$\alpha\,\mathrm{e}^t + \beta\,\mathrm{e}^{-2t} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- SOLUTION PARTICULIÈRE POUR $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t}$. Comme 1 est racine du polynôme caractéristique, on est en résonnance. On sait qu'il existe une solution particulière u_1 de la forme $at\,\mathrm{e}^t$ avec un a à déterminer. Comme
$$\partial_t^2 u_1 + \partial_t u_1 - 2u_1 = 3a\,\mathrm{e}^t$$
il faut que $3a = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que $a = 1/6$.

- SOLUTION PARTICULIÈRE POUR $-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}$. Ici, -2 n'est pas racine du polynôme caractéristique et donc on cherche une solution particulière u_2 de la forme $b\,\mathrm{e}^{-t}$. Un simple calcul montre que
$$\partial_t^2 u_2 + \partial_t u_2 - 2u_2 = -2b\,\mathrm{e}^{-t}$$
On va donc choisir b pour que $-2b = -1/2$, c'est-à-dire $b = 1/4$.

- SOLUTION PARTICULIÈRE POUR (4). Comme $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}$ et que l'équation est linéaire, on trouve une solution particulière de (4) en additionnant les solutions particulières pour $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t$ et $-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}$ (principe de superposition), ce qui donne

$$\tfrac{1}{6}t\,\mathrm{e}^t + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t}$$

- SOLUTIONS DE (4). Toutes les solutions de (4) s'écrivent comme une solution particulière de (4) et un élément du noyau (principe de superposition), elles sont donc

$$\alpha\,\mathrm{e}^t + \beta\,\mathrm{e}^{-2t} + \tfrac{1}{6}t\,\mathrm{e}^t + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Question 7. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Montrez que*

(a) *toutes les tangentes au graphe de f (en n'importe quelle abcisse) passent par $(0,0)$*

si et seulement si

(b) *f est la fonction $x \mapsto cx$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.*

Veillez à la qualité des justifications fournies.
INDICATION : *Pour (a) ⇒ (b), commencez par écrire l'équation qui exprime (a).*

$(b) \Rightarrow (a)$ C'est la partie facile. On prend un $c \in \mathbb{R}$ et la fonction f telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = cx$ et on montre que toutes les tangentes au graphe de f passent par $(0,0)$. Une équation de la tangente au graphe de f au point d'abcisse a est $y = f(a) + \partial f(a)(x-a)$. En l'occurrence, comme $f(a) = ca$ et $\partial f(a) = c$, on a

$$y = ca + c(x-a) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = cx$$

Il est évident que $(0,0)$ appartient à cette doite (vu que $0 = c\cdot 0$) — et ce quel que soit a.

$(a) \Rightarrow (b)$ Exprimons le fait que toutes les tangentes passent par $(0,0)$. Comme on vient de le dire, une équation de la tangente au graphe de f au point d'abcisse a est $y = f(a) + \partial f(a)(x-a)$. Elle passe par $(0,0)$ si et seulement si $0 = f(a) + \partial f(a)(0-a)$, c'est-à-dire si $f(a) = \partial f(a)a$. Comme c'est supposé vrai quel que soit a, la fonction f doit satisfaire l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial f(x)x = f(x) \tag{5}$$

Il est facile de voir que les fonctions $x \mapsto cx$ sont solutions de (5). Pour prouver l'implication il faut montrer *qu'il n'y en a pas d'autres*.

- On peut résoudre cette équation par la méthode des variables séparées : prenons $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{f(x)}{f(a)}\right| = \ln|f(x)| - \ln|f(a)| = \int_{f(a)}^{f(x)} \frac{1}{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi &= \int_a^x \frac{\partial f(\xi)}{f(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \qquad (6)\\ &= \int_a^x \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = \ln|x| - \ln|a| = \ln\left|\frac{x}{a}\right|\end{aligned}$$

  En passant aux exponentielles et en retirant les valeurs absolues, on trouve que $f(x) = \pm\frac{f(a)}{a}x$, d'où $f(x) = cx$ en posant $c := \pm f(a)/a$. Il y a cependant des problèmes avec cette méthode de résolution. Nous allons les mettre en évidence en esquissant des moyens de les contourner. Une démonstration alternative est donnée ci-dessous.

– Tout d'abord, on a un problème si $f(a)=0$. D'ailleurs on est sûr que ça arrive : (5) implique que $f(0)=0$. De deux choses l'une : ou bien f est identiquement nulle (et est une solution de (5)), ou bien $f(a)\neq 0$ pour un certain $a\neq 0$. Par continuité, on est sûr que $f(x)\neq 0$ si x est dans un voisinage V de a et donc on peut faire le calcul (6) pour $x\in V$. La question est : V est-il grand ? Pour le savoir essayons de prendre un V maximal : prenons V comme le plus grand intervalle contenant a sur lequel f ne s'annule pas. On a[6] que $V=\,]a_1,a_2[$ avec $-\infty\leqslant a_1<a<a_2\leqslant+\infty$ et $f(a_1)=0$ (resp. $f(a_2)=0$) pour autant que $a_1\neq-\infty$ (resp. $a_2\neq+\infty$). Sur $]a_1,a_2[$ on peut faire le calcul (6) et on trouve que $f(x)=cx$. Au vu de cette forme de f, les seules possibilités pour que f s'annule au bord de $]a_1,a_2[$ est que, si $a<0$, $a_1=-\infty$ et $a_2=0$ et, si $a>0$, $a_1=0$ et $a_2=+\infty$. Cela donne le résultat (9) ci-dessous et on continue de la même manière.

– Le second problème est que (6) ne nous donne pas $f(x)=cx$ comme on vient de l'affirmer mais seulement $|f(x)|=c'|x|$ avec $c':=|f(a)|/|a|$. Bien entendu, cela implique que, pour tout x, $f(x)=\pm c'x$ mais il faut se rendre compte que le signe $\pm$ peut prendre la valeur $+$ pour un x et $-$ pour un autre. Autrement dit, ce qu'on peut déduire de (6) est que
$$f(x)=\sigma(x)c'x \qquad \text{avec } \sigma: V\to\{-1,+1\} \tag{7}$$
où $V=\,]-\infty,0[$ on $V=\,]0,+\infty[$ selon[7] le signe de a. Dans les deux cas, on remarque que $c'x$ ne change pas de signe sur V. Par conséquent, si σ change de signe sur V, alors f le fera aussi. Mais comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'alors f possède une racine dans V. Ceci contredit la définition de V. Dès lors, $\sigma=1$ sur V ou $\sigma=-1$ sur V et dans les deux cas, on conclut que $f(x)=cx$ avec $c=\sigma(x)c'$ est une *constante*.

- Voici une résolution *alternative* qui évite les difficultés de la précédente. On commence par remarquer que
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad \partial_x\Big(\frac{f(x)}{x}\Big)=\frac{\partial f(x)x-f(x)}{x^2}=0 \tag{8}$$
Par conséquent f est constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes réelles c_- et c_+ telles que[8]
$$\forall x\in\,]-\infty,0[,\ f(x)=c_-x \qquad\text{et}\qquad \forall x\in\,]0,+\infty[,\ f(x)=c_+x \tag{9}$$
La continuité de la dérivée de f en 0 implique que $c_-=c_+$. En effet,
$$c_-=\lim_{x\xrightarrow{<}0}c_-=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\partial f(x)=\partial f(0)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\partial f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}c_+=c_+\,.$$
On a donc, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f(x)=c:=c_+=c_-$. Comme f est continue en 0,
$$f(0)=\lim_{x\xrightarrow{\neq}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{\neq}0}c=c.$$
On peut donc conclure que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=c$, comme recherché.

[6] Pouvez-vous le démontrer ?

[7] En effet, le terme $\sigma(x)$ ne permet pas de nouveaux zéros et donc l'argument basé sur la fausse conclusion $f(x)=cx$ peut être répété en utilisant (7).

[8] Notez que, de (8), on ne peut *pas* conclure que $c_-=c_+$. En effet, si on prend $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ définie par
$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$$
on a bien que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \partial g(x)=0$ et, pour cette fonction, $c_-=0$ et $c_+=1$.

Question 8. *Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :*

$$\partial_t^2 x + x = \sin(\partial_t x) + \mathrm{e}^t \tag{10}$$

où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donnez une équation de la forme

$$\partial_t u = F(t, u) \tag{11}$$

où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est l'inconnue et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est à déterminer, de manière à ce que les solutions de (10) et de (11) se correspondent. Expliquez en quoi consiste cette correspondance (i.e., quelle est la bijection entre les ensembles de solutions x et u).

Le F recherché est donné par

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \big(t, (u_1, u_2)\big) \mapsto (u_2, -u_1 + \sin u_2 + \mathrm{e}^t)$$

La correspondance entre les solutions de (10) et de (11) est la suivante :

- si $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (10), alors $t \mapsto \big(x(t), \partial_t x(t)\big)$ est solution de (11) ;
- si $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (u_1(t), u_2(t))$ est solution de (11), alors u_1 (la première composante de u) est solution de (10).

Analyse mathématique I

Examen (Info / Phys) (7 juin 2005) **Correction**

Question 1.

(a) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « f est continue en a » et termes de ε-δ* et *en termes de suites.*

En ε-δ : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$

En terme de suites : $\forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f,\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

(b) *En utilisant la définition en ε-δ donnée en (a), prouvez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en $x = 1$. (La qualité de la rédaction est importante.)*

INDICATION : *L'identité suivante peut vous aider :* $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$.

Il faut montrer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [0, +\infty[, \quad |x-1| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| = |\sqrt{x} - 1| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta := \varepsilon$. Soit $x \in [0, +\infty[$ tel que $|x - 1| \leqslant \delta$. Montrons que $|\sqrt{x} - \sqrt{1}| \leqslant \varepsilon$. C'est le cas car

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x} - \sqrt{1}\right| &= \left|\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1}}\right| && \text{(multiplication et division par } \sqrt{x}+\sqrt{1}\text{)} \\
&= \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} && (|x-1| \leqslant \delta \text{ par hypothèse et } \sqrt{x}+1 \geqslant 1) \\
&\leqslant \delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

(c) *Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies par*

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \\ \text{pas définie} & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \end{cases}$$

Tracez le graphe de g sur la figure 1 (resp. de h sur la figure 2). Dites si g et h sont des fonctions continues (sur leur domaine de définition). Justifiez vos réponses à partir de la définition du point (a) que vous désirez.

- Nous allons montrer que la fonction g n'est pas continue en 0 et, par conséquent, pas continue sur son domaine de définition. Pour ce faire, considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par $\forall n > 0,\ x_n := 1/n$. On a $x_n \to 0$ et, en tenant compte du fait que $x_n > 0$ quel que soit n, $f(x_n) = 1 - x_n \to 1 \neq f(0) = 0$. Ceci contredit la définition de « f continue en 0 » en termes de suites.
- La fonction h *est* continue sur son domaine de définition. Nous allons montrer la continuité de h en a en distinguant les trois cas $a \in]-\infty, -1[$, $a = 0$, et $a \in]1, +\infty[$.

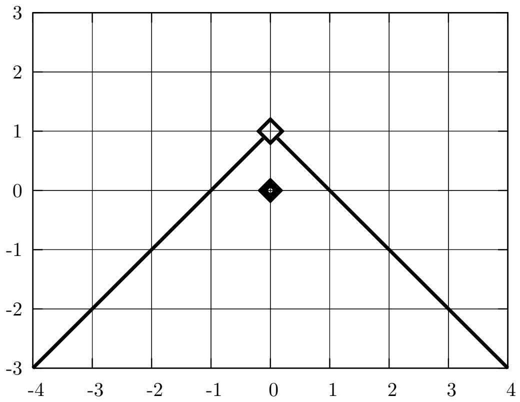


FIG. 1 – Graphe de g

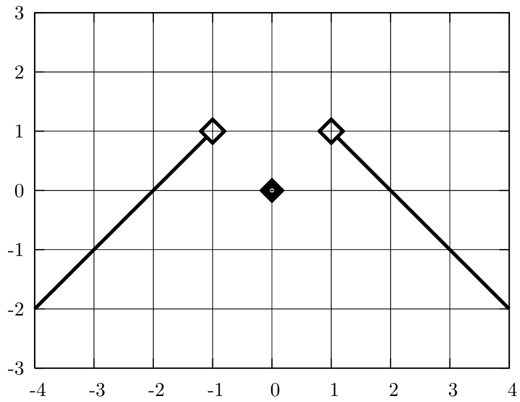


FIG. 2 – Graphe de h

- Soit $a \in \,]-\infty,-1[$ et $x_n \to a$. Comme $]-\infty,-1[$ est ouvert, la suite fini par y rentrer i.e., il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \in \,]-\infty,-1[$. Par conséquent, $h(x_n) = 2 + x_n \xrightarrow[n\to\infty,\ n\geqslant n_0]{} 2 + a = h(a)$. Donc $h(x_n) \to h(a)$ — puisque la convergence de la queue d'une suite est équivalente à la convergence de celle-ci.
- Le cas où $a \in \,]1,+\infty[$ est tout à fait similaire et est laissé au lecteur.
- Reste $a = 0$. Montrons que toute suite $(x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f$ qui converge vers 0 est ultimement constante, c'est-à-dire que, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant n_0,\ x_n = 0$. En effet, dans la définition de $x_n \to 0$, prenons $\varepsilon = 1/2$. Nous obtenons qu'il existe un n_0 (c'est celui que nous cherchons) tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |x_n| = |x_n - 0| \leqslant 1/2$. Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \in [-1/2, 1/2] \cap \operatorname{Dom} f = \{0\}$ et donc $x_n = 0$. Dès lors, pour tout $n \geqslant n_0$, $h(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty,\ n\geqslant n_0]{} 0 = h(0)$ et la continuité en 0 est prouvée.

Question 2.

(a) *Énoncez le théorème de la moyenne.*

Cf. syllabus.

(b) *Donnez une interprétation géométrique de ce théorème en expliquant la relation avec l'énoncé donné en (a).*

Cf. syllabus.

(c) *Montrez que toute fonction périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ possède une infinité de points critiques. (Pour rappel, on dit que f est périodique si $\exists \tau > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+\tau)$.)*

Considérons f sur l'intervalle $[0,\tau]$ où $\tau > 0$ est la période. Le théorème de la moyenne affirme qu'il existe un $\xi \in \,]0,\tau[$ tel que $f(\tau) - f(0) = \partial f(\xi)(\tau - 0)$. La périodicité implique que $f(\tau) = f(0)$ et donc que $\partial f(\xi) = 0$. D'autre part, comme les fonctions $x \mapsto f(x+\tau)$ et $x \mapsto f(x)$ sont égales, leurs dérivées (qui existent par hypothèse) le sont aussi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\partial_x\big(f(x+\tau)\big) = (\partial f)(x+\tau) = \partial f(x)$ — autrement dit, ∂f est périodique de période τ. Par conséquent $\partial f(\xi + n\tau) = \partial f(\xi +$

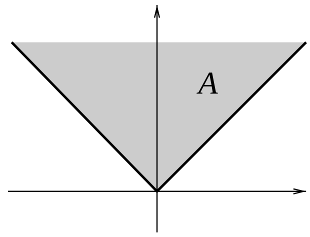
$(n-1)\tau) = \cdots = \partial f(\xi + 2\tau) = \partial f(\xi + \tau) = \partial f(\xi) = 0$ quel que soit[1] $n \in \mathbb{N}$. Ceci montre que les points (en nombre infini) $\xi + n\tau$, $n \in \mathbb{N}$, sont des points critiques de f.

Question 3. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ l'ensemble défini par $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant |x_1|\}$ et représenté ci-après. Pour chacune des propriétés suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Argumentez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\exists x \in \mathbb{R}^2,\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \cap A \neq \varnothing$ *et* $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \cap \complement A \neq \varnothing$

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ (\exists r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \subseteq A) \Rightarrow x \in A$

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \subseteq A$



(a) Prenons $x = 0 = (0,0)$ et vérifions qu'il satisfait bien $\forall r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(0,r) \cap A \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}(0,r) \cap \complement A \neq \varnothing$. Soit $r > 0$.

- Le point $(0, r/2)$ est dans $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}(0,r)$ (puisque $\sqrt{0^2 + (r/2)^2} = r/2 < r$) et dans A (puisque $r/2 \geqslant |0| = 0$), ce qui montre que $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}(0,r) \cap A \neq \varnothing$.
- Le point $(0, -r/2)$ est dans $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}(0,r)$ (puisque $\sqrt{0^2 + (-r/2)^2} = r/2 < r$) et dans $\complement A$ (puisque $-r/2 \ngeqslant |0| = 0$), ce qui montre que $\mathrm{B}_{|\cdot|_2}(0,r) \cap \complement A \neq \varnothing$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\exists r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \subseteq A$. Il faut montrer que $x \in A$. C'est le cas car $x \in \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \subseteq A$.

(c) Il faut montrer que la négation est vraie, à savoir que

$$\exists x \in A,\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \not\subseteq A$$

Comme la non-inclusion à A revient à dire que l'intersection avec $\complement A$ est non-vide, on doit en fait montrer que

$$\exists x \in A,\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(x,r) \cap \complement A \neq \varnothing$$

Il suffit de prendre $x = (0,0)$ et de prouver, comme en (a), que, pour tout $r > 0$, $(0, -r/2) \in \mathrm{B}_{|\cdot|_2}(0,r) \cap \complement A$

[1] Pouvez-vous montrer qu'en fait $\partial f(\xi + n\tau) = \partial f(\xi) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$?

Question 4.

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est fermé » en terme de boule.

$$\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow x \in A$$

(b) Utilisez cette définition pour montrer que

- $[0,1]$ *est fermé ;*

  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap [0,1] \neq 0$. (Rappelons que dans $\mathbb{R}$, on considère la norme « valeur absolue » pour laquelle $\mathrm{B}(x,r) =]x-r, x+r[$.) Il faut montrer que $x \in [0,1]$. Supposons au contraire que $x \notin [0,1]$. Distinguons deux cas :

  - $x < 0$: en prenant $r = -x > 0$, on a que $]x-r, x+r[\cap [0,1] =]-2r, 0[\cap [0,1] = \varnothing$ ce qui contredit l'hypothèse de départ.
  - $x > 1$: en prenant $r = x-1$, on a que $]x-r, x+r[\cap [0,1] \subseteq]1, +\infty[\cap [0,1] = \varnothing$ ce qui, de nouveau, contredit l'hypothèse de départ.

  Comme on arrive toujours à une contradiction, on ne pouvait supposer que $x \notin [0,1]$, c'est-à-dire qu'on a $x \in [0,1]$ comme voulu.

- $[0,1[$ *n'est pas fermé.*

  On doit montrer que la négation de la définition est vraie, c'est-à-dire que

  $$\exists x \in \mathbb{R},\ (\forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing) \wedge x \notin A$$

  Prenons $x = 1$. Clairement $x \notin [0,1[$. Reste à voir que $\forall r > 0,\ \mathrm{B}(1,r) \cap A \neq \varnothing$. Soit $r > 0$. Posons $\rho = \min\{1, r/2\}$. Comme $1 - r < 1 - \rho < 1 < 1 + r$ (car $\rho \leqslant r/2 < r$), on a que $1 - \rho \in]1-r, 1+r[= \mathrm{B}(1,r)$. De plus, comme $0 \leqslant 1 - \rho < 1$ (car $\rho \leqslant 1$), on a aussi que $1 - \rho \in A$. Donc $1 - \rho \in \mathrm{B}(1,r) \cap A$ et on a établit que $\mathrm{B}(1,r) \cap A \neq \varnothing$ comme on devait.

Question 5. *Calculez le développement de Taylor d'ordre 2 en $x = \pi/2$, avec reste, de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\sin x}$$

Réponse finale : $\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{\exists \xi \in [\pi/2, x]}_{\text{Quantificateurs éventuels}}$

$$f(x) = \underbrace{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e} + \mathrm{e}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2}_{\text{Développement de Taylor}}$$
$$+ \underbrace{\tfrac{1}{6}\big(-3\sin\xi - \xi\cos\xi + 3\cos^2\xi - 3\xi\cos\xi\sin\xi + \xi\cos^3\xi\big)\,\mathrm{e}^{\sin\xi}\big(x - \frac{\pi}{2}\big)^3}_{\text{Reste}}$$

Détaillez ci-dessous vos calculs.

On a vu au cours que, comme f est de classe $\mathscr{C}^3$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \xi \in [\pi/2, x]$,

$$f(x) = f\big(\tfrac{\pi}{2}\big) + \partial f\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + \tfrac{1}{2}\partial^2 f\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 + \tfrac{1}{6}\partial^3 f(\xi)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3 \qquad (1)$$

Il faut donc calculer les trois premières dérivées de f et les évaluer aux bons points. Les règles de calcul de dérivées impliquent

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x) &= \big(\partial_x x\big)\, e^{\sin x} + x\,\partial_x e^{\sin x} = (1 + x\cos x)\, e^{\sin x} \\
\partial_x^2 f(x) &= \big(\partial_x(1 + x\cos x)\big)\, e^{\sin x} + (1+\cos x)\partial_x e^{\sin x} = (2\cos x - x\sin x + x\cos^2 x)\, e^{\sin x} \\
\partial_x^3 f(x) &= \big(\partial_x(2\cos x - x\sin x + x\cos^2 x)\big)\, e^{\sin x} + (2\cos x - x\sin x + x\cos^2 x)\partial_x e^{\sin x} \\
&= (-3\sin x - x\cos x + \cos^2 x - 2x\cos x\sin x)\, e^{\sin x} + (2\cos^2 x - x\sin x\cos x + x\cos^3 x)\, e^{\sin x} \\
&= (-3\sin x - x\cos x + 3\cos^2 x - 3x\cos x\sin x + x\cos^3 x)\, e^{\sin x}
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $\sin(\pi/2) = 1$ et $\cos(\pi/2) = 0$, on a

$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}\, e, \qquad \partial_x f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = e, \qquad \partial_x^2 f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{\pi}{2}\, e\,.$$

et il suffit de remplacer dans (1) pour avoir le résultat.

Question 6. *Donnez toutes les solutions réelles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ de l'équation*

$$\partial_t^2 u + \partial_t u - 2u = \operatorname{sh} t \tag{2}$$

RAPPEL : $\operatorname{sh} x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

- ÉQUATION HOMOGÈNE. Le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à (2) est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. Il possède 1 et -2 comme racines. Les solutions complexes de $\partial_t^2 u + \partial_t u - 2u = 0$ sont donc
$$\alpha\, e^t + \beta\, e^{-2t} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$
Comme (2) est à coefficients réels, on a vu qu'on obtient toutes les solutions réelles en prenant la partie réelle des solutions complexes, ce qui donne :
$$\alpha\, e^t + \beta\, e^{-2t} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
- SOLUTION PARTICULIÈRE POUR $\frac{1}{2}\, e^{1t}$. Comme 1 est racine du polynôme caractéristique, on est en résonnance. On sait qu'il existe une solution particulière u_1 de la forme $at\, e^t$ avec un a à déterminer. Comme
$$\partial_t^2 u_1 + \partial_t u_1 - 2u_1 = 3a\, e^t$$
il faut que $3a = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que $a = 1/6$.
- SOLUTION PARTICULIÈRE POUR $-\frac{1}{2}\, e^{-t}$. Ici, -2 n'est pas racine du polynôme caractéristique et donc on cherche une solution particulière u_2 de la forme $b\, e^{-t}$. Un simple calcul montre que
$$\partial_t^2 u_2 + \partial_t u_2 - 2u_2 = -2b\, e^{-t}$$
On va donc choisir b pour que $-2b = -1/2$, c'est-à-dire $b = 1/4$.
- SOLUTION PARTICULIÈRE POUR (2). Comme $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\, e^t - \frac{1}{2}\, e^{-t}$ et que l'équation est linéaire, on trouve une solution particulière de (2) en additionnant les solutions particulières pour $\frac{1}{2}\, e^t$ et $-\frac{1}{2}\, e^{-t}$ (principe de superposition), ce qui donne
$$\tfrac{1}{6} t\, e^t + \tfrac{1}{4}\, e^{-t}$$

- SOLUTIONS DE (2). Toutes les solutions de (2) s'écrivent comme une solution particulière de (2) et un élément du noyau (principe de superposition), elles sont donc

$$\alpha\,\mathrm{e}^{t} + \beta\,\mathrm{e}^{-2t} + \tfrac{1}{6}t\,\mathrm{e}^{t} + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{avec } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Question 7. *Rappelons que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, on définit $f(A) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A,\ y = f(x)\}$.*

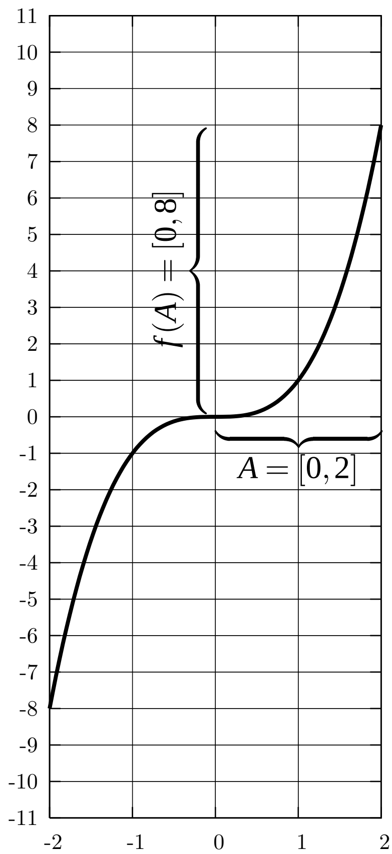
(a) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ et $A = [0,2]$.*

- *Sur la figure ci-contre, esquissez le graphe de f, A et $f(A)$.*
- *Déterminez $f(A)$ par calcul.*

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [0,2],\ y = x^3\} = [0,8]$$

Pour justifier la dernière égalité, montrons les deux inclusions.

– $f(A) \subseteq [0,8]$. Soit $y \in f(A)$. Par définition, $y = f(x)$ pour un certain $x \in [0,2]$. Comme $x \mapsto x^3$ est croissante, on déduit de $0 \leqslant x \leqslant 2$ que $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(2) = 8$ i.e., que $y = f(x) \in [0,8]$.
– $f(A) \supseteq [0,8]$. Soit $y \in [0,8]$. Il faut prouver que $y \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in [0,2]$ tel que $y = f(x)$. Prenons $x := \sqrt[3]{y}$. Comme ci-dessus, on déduit de la croissante de $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ et de $y \in [0,8]$ que $x = \sqrt[3]{y} \in [0,2]$. De plus, $y = f(x)$ car $f(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.



- *Calculez $\sup f(A)$ et $f(\sup A)$. Énoncez les résultats éventuellement utilisés.*

On a vu que le suprémum d'un intervalle $[a,b]$ ($a \leqslant b$) est[2] b. Ici, $\sup f(A) = \sup[0,8] = 8$ et $f(\sup A) = f(\sup[0,2]) = f(2) = 2^3 = 8$.

(b) *Prouvez que, quels que soient la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue et l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné supérieurement, on a $\sup f(A) = f(\sup A)$.*

INDICATION : *Si $A \neq \varnothing$, alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup A$.*

On doit montrer que $f(\sup A)$ est le suprémum de $f(A)$, c'est-à-dire que (selon une des définitions équivalentes du suprémum) :

$$\forall y \in f(A), \quad y \leqslant f(\sup A) \tag{3}$$

$$\exists (y_n) \subseteq f(A), \quad y_n \to f(\sup A) \tag{4}$$

Prouvons (3). Soit $y \in f(A)$. Par définition, il existe un $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Puisque le suprémum est un majorant, on a $x \leqslant \sup A$. Comme f est croissante,[3] on a $y = f(x) \leqslant f(\sup A)$ comme désiré.

[2] En effet, $b \in [a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ x \leqslant b$, donc b est le maximum de $[a,b]$, à fortiori le suprémum.

[3] Pour rappel, « f croissante » veut dire que, quels que soient x_1 et x_2, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Notons que pour (3), on n'a pas besoin de la continuité de f.

Passons à (4). Par définition du suprémum de A, on sait qu'il existe une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $x_n \to \sup A$. Par continuité de f, on a $f(x_n) \to f(\sup A)$. Posons $(y_n) := \big(f(x_n)\big)$. On a bien que $(y_n) \subseteq f(A)$ — puisque, pour tout n, $y_n = f(x_n) \in f(A)$ — et $y_n = f(x_n) \to f(\sup A)$.

(c) *Donnez un exemple qui montre que la propriété (b) n'est pas nécessairement vérifiée si f n'est pas continue.*

Prenons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est croissante et n'est pas continue en 0 (c'est laissé en exercice). Choisissons $A := \left]-1, 0\right[$. On a $\sup A = 0$ (suprémum d'un intervalle, vu au cours). Par ailleurs, comme $A \subseteq \left]-\infty, 0\right[$, $f(x) = 0$ pout tout $x \in A$ et donc $f(A) = \{0\}$. Par conséquent $\sup f(A) = \sup\{0\} = 0 \neq f(\sup A) = f(0) = 1$, ce qui montre que (b) n'est pas vérifiée.

Question 8. *Calculez les intégrales suivantes :*

- $\displaystyle\int_3^4 \frac{5}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$

  Pour calculer cette intégrale, la technique est de l'exprimer comme somme de fractions simples. On commence par factoriser le dénominateur $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ et on cherche α et β tels que

  $$\frac{5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2}$$

  Comme $\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{(\alpha+\beta)x + (-2\alpha-\beta)}{x^2-3x+2}$, il suffit de satisfaire les équations $\alpha + \beta = 0$ et $-2\alpha - \beta = 5$ qui ont pour solution $\alpha = -5$ et $\beta = 5$. Dès lors

  $$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{5}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_3^4 \frac{-5}{x-1} + \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{-5}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= -5\ln|x-1|\big]_3^4 + 5\ln|x-2|\big]_3^4 \\ &= -5(\ln 3 - \ln 2) + 5(\ln 2 - \ln 1) \\ &= -5\ln 3 + 10\ln 2 \end{aligned}$$

  (Rappelez-vous que $\ln 1 = 0$.)

- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *en utilisant le changement de variable* $x = \operatorname{sh} y$.

  RAPPELS : $\operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})$, $\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})$ *et* $\mathrm{e}^{-y} = 1/\mathrm{e}^y$.

  La formule de changement de variable dit que

  $$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + (\operatorname{sh} y)^2}\,\partial_y(\operatorname{sh} y)\,\mathrm{d}y$$

où y_0 (resp. y_1) est tel que $0 = \operatorname{sh} y_0$ (resp. $1 = \operatorname{sh} y_1$). Comme $1 + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y$, que $\forall y,\ \operatorname{ch} y \geqslant 0$, et que $\partial_y(\operatorname{sh} y) = \operatorname{ch} y$, l'intégrale devient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{y_0}^{y_1} \operatorname{ch}^2 y\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{4}\int_{y_0}^{y_1} (\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})^2\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{4}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{e}^{2y} + 2 + \mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{4}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y + \tfrac{1}{4}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y + \tfrac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2y}\Big]_{y_0}^{y_1} - \tfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2y}\Big]_{y_0}^{y_1} + \tfrac{1}{2}y\Big]_{y_0}^{y_1} \\
&= \tfrac{1}{8}(\mathrm{e}^{2y_1} - \mathrm{e}^{2y_0}) - \tfrac{1}{8}(\mathrm{e}^{-2y_1} - \mathrm{e}^{-2y_0}) + \tfrac{1}{2}(y_1 - y_0) \\
&= \tfrac{1}{4}\big(\operatorname{sh}(2y_1) - \operatorname{sh}(2y_0)\big) + \tfrac{1}{2}(y_1 - y_0)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}$ (resp. $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}$) est une primitive de e^{2y} (resp. e^{-2y}). Reste à déterminer y_0 et y_1. L'équation $0 = \operatorname{sh} y_0$ possède une seule solution[4] $y_0 = 0$. En remplaçant, on a

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\operatorname{sh}(2y_1) + \tfrac{1}{2}y_1$$

De plus,[5] $\operatorname{sh}(2y_1) = 2\operatorname{sh} y_1 \operatorname{ch} y_1 = 2\operatorname{sh} y_1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y_1} = 2\sqrt{2}$. Par ailleurs, l'équation $\operatorname{sh} y_1 = 1$ peut se réécrire

$$\mathrm{e}^{y_1} - \frac{1}{\mathrm{e}^{y_1}} = 2$$

Si on pose $\eta := \mathrm{e}^{y_1}$, cette équation devient $\eta - 1/\eta = 2$ ou encore (en la multipliant par η), $\eta^2 - 2\eta - 1 = 0$. Cette dernière équation a pour solutions $\eta = -1 - \sqrt{2}$ et $\eta = -1 + \sqrt{2}$. Comme $\eta = \mathrm{e}^{y_1} > 0$, seule la seconde solution doit être retenue : $\mathrm{e}^{y_1} = -1 + \sqrt{2}$ ou encore $y_1 = \ln(-1 + \sqrt{2})$. On peut donc conclure que

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\operatorname{sh}(2y_1) + \tfrac{1}{2}y_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2} - 1)$$

[4] On le voit sur le graphe du sinus hyperbolique. Si on veut le justifier, on constate par calcul direct que $\operatorname{sh} 0 = 0$ et on voit que sh est strictment croissante (car $\partial \operatorname{sh} y = \operatorname{ch} y > 0$), donc injective.

[5] La formule $\operatorname{sh}(2y) = 2\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y$ est similaire à $\sin(2y) = 2\sin y \cos y$. Elle se démontre aisément : $\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^{-2y}) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2y)$.