Analyse mathématique I

Examen (17 août 2005)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /5

(a) Soit $(x_n)_{n\in I} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Donnez la formule quantifiée qui exprime le fait que « $x_n \to a$ ».

(b) En utilisant la définition ci-dessus, prouvez que si $(x_n)_{n\geqslant 100} \subseteq \mathbb{R}$ est une suite telle que $x_n \to 1$, alors $x^2_{2n-20} \to 1$. La qualité de la rédaction est importante.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/6

Question 2. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \lambda x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f est-elle continue ? Montrez la continuité de la fonction f pour ces valeurs.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f n'est-elle pas continue ? Pour ces valeurs, prouvez que f n'est pas continue.

Énoncez clairement les définitions et résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I

Examen (17 août 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Mathématique

Question 3. Donnez toutes les solutions réelles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto u(x)$ de l'équation $/6$

$$\partial_x^2 u + u = \cos 2x + x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite). Continuez votre réponse sur cette page, si nécessaire.

Analyse mathématique I

Examen (17 août 2005)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 3x}{1+x^2}$$

/6

Réponse finale : $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Quantificateurs éventuels}}$

$$f(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Développement de Taylor}} + \mathrm{o}\underbrace{\Big(\qquad\qquad\Big)}_{\text{Reste}}$$

Détaillez ci-dessous vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4 (suite). Continuez vos calculs sur cette page.

Question 4 (suite). En vous aidant du développement ci-dessus, calculez la limite suivante :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-1}{x\cos x + e^{x^2} - x - 1}$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/8

Question 5.

- Définissez « $A \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ».

- Définissez

$$\operatorname{adh} A = \left\{ \boxed{} \right\}$$

- Rappelons qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ est dit *dense* dans $\mathbb{R}$ si $\operatorname{adh} A = \mathbb{R}$. Prouvez que A est dense si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a \in \left]x - \varepsilon, x + \varepsilon\right[$. Comme d'habitude, identifiez clairement les résultats du cours utilisés.

- Prouvez que si P est un ensemble *fini* de points de $\mathbb{R}$, alors $A := \mathbb{R} \setminus P$ est ouvert et dense dans $\mathbb{R}$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5 (suite).

- Prouvez que si A et B sont ouverts et denses dans $\mathbb{R}$, alors $A \cap B$ l'est aussi.

Analyse mathématique I

Examen (17 août 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Mathématique

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante (mais pas nécessairement continue). /6

- Rappelez la définition de « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante ».

- Montrez que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x) = \sup\{ f(x) : x < a \}$$

et que cette quantité n'est jamais $\pm\infty$.

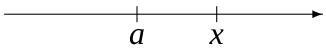
INDICATIONS : Commencez par prouver que le suprémum $s := \sup\{ f(x) : x < a \}$ est un nombre réel. Ensuite montrez que $f(x) \to s$ lorsque $x \overset{<}{\longrightarrow} a$ (rappelez vous qu'on ne sait pas à priori que la limite existe).

Question 6 (suite).

- En utilisant le point précédent avec $g(x) = -f(2a-x)$ au lieu de f, déduisez que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = \inf\{ f(x) : x > a \}$$

INDICATION : Compléter le dessin ci-contre en ajoutant $2a - x$.



- Exhibez un exemple de fonction croissante f qui montre qu'on a pas nécessairement

$$\lim_{x \overset{\leqslant}{\longrightarrow} a} f(x) = \sup\{ f(x) : x \leqslant a \}$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/3

Question 7. Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\partial_t^3 x + x = \partial_t x + \mathrm{e}^t - \partial_t^2 x \tag{1}$$

où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donnez une équation de la forme

$$\partial_t u = F(t, u) \tag{2}$$

où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est l'inconnue et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est à déterminer, de manière à ce que les solutions de (1) et de (2) se correspondent. Expliquez en quoi consiste cette correspondance (i.e., quelle est la bijection entre les ensembles de solutions x et u).

Analyse mathématique I

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Examen (17 août 2005)

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et barrer la section inutile sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /5

(a) Soit $(x_n)_{n\in I} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Donnez la formule quantifiée qui exprime le fait que « $x_n \to a$ ».

(b) En utilisant la définition ci-dessus, prouvez que si $(x_n)_{n\geqslant 100} \subseteq \mathbb{R}$ est une suite telle que $x_n \to 1$, alors $x^2_{2n-20} \to 1$. La qualité de la rédaction est importante.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 2. Soit la fonction

/6

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \lambda x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f est-elle continue ? Montrez la continuité de la fonction f pour ces valeurs.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f n'est-elle pas continue ? Pour ces valeurs, prouvez que f n'est pas continue.

Énoncez clairement les définitions et résultats que vous utilisez.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

/11

Question 3.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction dérivable et $a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$. Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$. Donnez les coordonnées du point d'intersection entre cette tangente et l'axe des x. Expliquez votre démarche.

- Montrez que $\mathrm{o}(x^4)\,\mathrm{o}(x^3) = \mathrm{o}(x^7)$ quand $x \to 0$. Rappelez les définitions que vous utilisez et détaillez vos calculs.

Question 3 (suite).

- Définissez « p est le développement de Taylor de f en a à l'ordre n ». Donnez le développement de Taylor de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x^2 - 3x^3 + x^5$ en $x = 1$ à l'ordre 4 et justifiez votre réponse grâce à la définition donnée.

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est fermé » en terme de suites. En utilisant cette définition, montrez que $[-1, 5]$ est fermé et que $]-1, 5]$ ne l'est pas.

Analyse mathématique I

Examen (17 août 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? /6

$$f \text{ est continue } \underset{\text{(b)}}{\overset{\text{(a)}}{\substack{\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}}} f \text{ est dérivable}$$

Appuyez chacune de vos réponses par une preuve détaillée[1] ou un contre-exemple explicite. Énoncez clairement les définitions que vous utilisez.

[1] Un argument du type « vu au cours » n'est pas accepté.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 5. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/6

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 3x}{1 + x^2}$$

Réponse finale : $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Quantificateurs éventuels}}$

$$f(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Développement de Taylor}} + \mathrm{o}\underbrace{\Big(\qquad\qquad\Big)}_{\text{Reste}}$$

Détaillez ci-dessous vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 5 (suite). Continuez vos calculs sur cette page.

Question 5 (suite). En vous aidant du développement ci-dessus, calculez la limite suivante :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-1}{x\cos x + e^{x^2} - x - 1}$$

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 6. Donnez toutes les solutions réelles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto u(x)$ de l'équation

$/6$

$$\partial_x^2 u + u = \cos 2x + x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 6 (suite). Continuez votre réponse sur cette page, si nécessaire.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 7. Calculez les intégrales suivantes : /4

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_3^4 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Analyse mathématique I

Examen (17 août 2005)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 8. Écrivez les ensembles suivants sous la forme d'une union finie d'intervalles (éventuellement non bornés) disjoints. Justifiez votre réponse. /6

- $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R},\ y \geqslant \sin x\}$
- $B = \{z \in \mathbb{R} : \forall s \in \mathbb{R},\ s^2 - s \leqslant 0 \Rightarrow z \geqslant s\}$
- $C = \{x \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ \exists u \leqslant t,\ x \geqslant u\}$