Analyse mathématique I

Examen (11 janvier 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1.

/3

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

- Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}^N$. Définissez « $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ».

- Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^N$. Définissez « $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes ».

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Calculez les limites, au sens large, des suites ci-dessous, si elles existent. Détaillez les différentes étapes de vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/6

(a) $\left(\dfrac{1+2^n}{n!}\cos(n)\right)_{n\geqslant 0}$

(b) $\left(\dfrac{n^2-1}{n+\sin n}\right)_{n\geqslant 1}$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3.

/12

(a) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par

$$x_n := 1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

En utilisant la définition de convergence « en ε », prouvez que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

(b) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la suite définie par

$$y_n := \frac{n^2 + (n+1)\cos n}{n^2 + n + 1}$$

Montrez, par la méthode de votre choix, que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Détaillez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite).

(c) On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$z_n := \begin{cases} x_n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ y_n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Prouvez, en utilisant la définition de convergence « en ε », que $z_n \to 1$. Veillez à la qualité de votre rédaction. (Vous pouvez bien entendu faire usage des résultats prouvés aux deux points précédents.)

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 4. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par

$$x_n = 2^{1+pn}$$

où p est un paramètre réel. Étudiez la convergence au sens large de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de p. Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donnez la valeur de sa limite. Justifiez vos réponses.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. On considère les trois propriétés suivantes à propos d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$: /7

$$\exists R \in \mathbb{R}^{\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant R \tag{1}$$

$$\exists R_1, R_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ R_1 \leqslant x_n \leqslant R_2 \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists R \in \mathbb{R}^{\geqslant 0},\ |x_n| \leqslant R \tag{3}$$

Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ (1) ⇒ (2).

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ (2) ⇒ (1).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ (1) ⇒ (3).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ (3) ⇒ (1).

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ (2) ⇔ (3).

Justifiez chacune de vos réponses par une preuve ou un contre-exemple.

Analyse mathématique I

Examen (11 janvier 2006)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. /8

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est l'infimum de A ».

(b) Calculez $\inf\big(]0,4[\cap[\sqrt{2},\pi^2]\big)$. Justifiez votre réponse en utilisant la définition que vous avez donnée en (a).

(c) Calculez $\inf\{x \in \mathbb{R} : x\sin x > 1\} \in [-\infty,\infty]$. Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. On est intéressé par les deux propriétés suivantes au sujet d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$: /8

$$\forall x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x > 1/n \tag{4}$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall x \in A,\ x > 1/n \tag{5}$$

- Pour chacun des ensembles ci-après, dites si (4) et/ou (5) est vérifié. Donnez à chaque fois une preuve de vos affirmations.

$$A_1 =]2,5], \qquad A_2 =]0, \tfrac{1}{2}[,$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7 (suite).

- Montrez que si A vérifie (4), alors $0 \notin A$.

- Peut-on affirmer que si un ensemble A vérifie (4), alors A est borné inférieurement ? Justifiez votre réponse (qu'elle soit positive ou négative).

Analyse mathématique I

Examen (11 janvier 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. /6

(a) Soit $a \in \mathbb{R}^N$, $R \in \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Définissez $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[a,R]$.

(b) Dessinez, sur un même graphe, les cinq boules de $\mathbb{R}^2$ ci-après :

$$\mathrm{B}_{|\cdot|_2}[0,2], \quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,1),1\big], \quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,1),1\big], \quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,-1),1\big], \quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,-1),1\big].$$

Veillez à ce que votre dessin soit clair. Il n'est pas nécessaire de justifier vos constructions.

(c) Montrez par calcul que

$$\mathrm{B}_{|\cdot|_2}[0,2] \subseteq \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,1),1\big] \cup \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,1),1\big] \cup \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,-1),1\big] \cup \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,-1),1\big].$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Parmi les propriétés suivantes, cochez toutes celles qui disent que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. /7

(a) ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \Rightarrow x_n \geqslant x_m$

(b) ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \Rightarrow x_n \geqslant x_m$

(c) ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_n - 1$

(d) ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_n$

(e) ☐ $\exists \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_0 - n\alpha$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]0,+\infty[$ une suite convergeant vers 0. Montrez qu'il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $x'_n \to 0$.