Analyse mathématique I

Examen (11 janvier 2006) **Correction**

Question 1.

- *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon$$

- *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}^N$. Définissez « $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ».*

  Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{\varphi(n)}$$

- *Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^N$. Définissez « $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes ».*

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_2 \text{ et } \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$$

Question 2. *Calculez les limites, au sens large, des suites ci-dessous, si elles existent. Détaillez les différentes étapes de vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.*

(a) $\left(\dfrac{1+2^n}{n!}\cos(n)\right)_{n\geqslant 0}$

(b) $\left(\dfrac{n^2-1}{n+\sin n}\right)_{n\geqslant 1}$

(a) On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1+2^n}{n!}\cos(n)\right| &\leqslant \left|\frac{1+2^n}{n!}\right| && \text{car } |\cos(x)| \leqslant 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\\
&\leqslant \frac{1}{n} + \frac{2^n}{n!} && \text{car la fraction est } \geqslant 0 \text{ et } n! \geqslant n\\
&= \frac{1}{n} + \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n} && \text{car } n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\\
&\leqslant \frac{1}{n} + 2\frac{2}{n} && \text{car } \frac{2}{2} \leqslant 1,\ \frac{2}{3} \leqslant 1, \dots, \frac{2}{n-1} \leqslant 1\\
&= \frac{5}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Le théorème de la convergence dominée implique alors que $\dfrac{1+2^n}{n!}\cos(n) \to 0$.

(b) On a

$$\frac{n^2-1}{n+\sin n} = n\,\frac{1-1/n}{1+(\sin n)/n}$$

Comme $1/n \to 0$ et que $(\sin n)/n \to 0$ (par la convergence dominée appliquée à l'inégalité $|(\sin n)/n| \leqslant 1/n$), les règles de calcul impliquent que $1-1/n \to 1$, $1+(\sin n)/n \to 1$ et par conséquent

$$\frac{1-1/n}{1+(\sin n)/n} \to 1.$$

Par ailleurs, nous avons vu que $n \to +\infty$. Les règles de calcul sur la convergence vers $+\infty$ impliquent que le produit tend vers $+\infty$, i.e.

$$\frac{n^2-1}{n+\sin n} \to +\infty$$

Question 3.

(a) *On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par*

$$x_n := 1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

En utilisant la définition de convergence « en ε », prouvez que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Il faut prouver que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - 1| \leqslant \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons

$$n_0 := \max\left\{0, \left\lceil \frac{\log(9\varepsilon/2)}{\log(2/3)} \right\rceil\right\}$$

Soit $n \geqslant n_0$. Comme $n \geqslant \left\lceil \frac{\log(9\varepsilon/2)}{\log(2/3)} \right\rceil \geqslant \frac{\log(9\varepsilon/2)}{\log(2/3)}$, on a en multipliant par $\log\frac{2}{3} < 0$ que $\log\left(\frac{2}{3}\right)^n = n\log\frac{2}{3} \leqslant \log(\frac{9\varepsilon}{2})$. Comme l'exponentielle est croissante, ceci implique que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \frac{9}{2}\varepsilon$ ou encore que

$$|x_n - 1| = \left|\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right| = \frac{2}{3^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon.$$

(b) *Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la suite définie par*

$$y_n := \frac{n^2 + (n+1)\cos n}{n^2+n+1}$$

Montrez, par la méthode de votre choix, que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Détaillez les différentes étapes de vos calculs.

Pour $n \geqslant 1$, on peut écrire

$$y_n = \frac{1 + \frac{n+1}{n}\frac{\cos n}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

On a vu au cours que $1/n \to 0$. Par conséquent, les règles de calcul impliquent que $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0$ d'où $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \to 1$. Également, $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \to 1$. Le théorème de convergence dominée nous permet de déduire de $\left|\frac{\cos n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0$ que $\frac{\cos n}{n} \to 0$. Donc $\frac{n+1}{n}\frac{\cos n}{n} \to 1\cdot 0 = 0$ et le numérateur converge vers 1. La règle de limite d'un quotient nous dit alors que $y_n \to \frac{1}{1} = 1$.

(c) *On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$z_n := \begin{cases} x_n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ y_n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Prouvez, en utilisant la définition de convergence « en ε », que $z_n \to 1$. Veillez à la qualité de votre rédaction. (Vous pouvez bien entendu faire usage des résultats prouvés aux deux points précédents.)

On a prouvé aux points (a) et (b) que

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0',\ |x_n - 1| \leqslant \varepsilon' \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon'' > 0,\ \exists n_0'' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0'',\ |y_n - 1| \leqslant \varepsilon'' \tag{2}$$

On doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |z_n - 1| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\varepsilon' = \varepsilon$ dans (1) (resp. $\varepsilon'' = \varepsilon$ dans (2)), on obtient l'existence d'un n_0' (resp. n_0'') tel que

$$\forall n \geqslant n_0',\ |x_n - 1| \leqslant \varepsilon' = \varepsilon \tag{3}$$

$$(\text{resp. } \forall n \geqslant n_0'',\ |y_n - 1| \leqslant \varepsilon'' = \varepsilon). \tag{4}$$

Posons $n_0 := \max\{n_0', n_0''\}$. Soit $n \geqslant n_0$. De deux choses l'une :

- soit n est pair et alors $|z_n - 1| = |x_n - 1| \leqslant \varepsilon$ en vertu de (3) ;
- soit n est impair et alors $|z_n - 1| = |y_n - 1| \leqslant \varepsilon$ en vertu de (4).

Dans tous les cas, on a $|z_n - 1| \leqslant 1$.

Question 4. *Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ définie par*

$$x_n = 2^{1+pn}$$

où p est un paramètre réel. Étudiez la convergence au sens large de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de p. Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donnez la valeur de sa limite. Justifiez vos réponses.

Nous allons montrer que

- si $p < 0$, alors $x_n \to 0$;
- si $p = 0$, alors $x_n \to 2$;
- si $p > 0$, alors $x_n \to +\infty$.

Le cas $p = 0$ est évident puisqu'alors (x_n) est la suite constante de valeur 2.

Si $p < 0$, $2^p < 1$ et donc $2^{pn} = (2^p)^n \to 0$ car on a vu qu'une suite géométrique de raison dans $]-1, 1[$ converge vers 0. En conclusion $x_n = 2 \cdot 2^{pn} \to 2 \cdot 0 = 0$.

Si $p > 0$, $2^p > 1$ et dès lors $2^{pn} = (2^p)^n \to +\infty$. Les règles de calcul impliquent alors que $x_n = 2 \cdot 2^{pn} \to +\infty$.

Question 5. *On considère les trois propriétés suivantes à propos d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\exists R \in \mathbb{R}^{\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant R \tag{5}$$

$$\exists R_1, R_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ R_1 \leqslant x_n \leqslant R_2 \tag{6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists R \in \mathbb{R}^{\geqslant 0},\ |x_n| \leqslant R \tag{7}$$

Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ (5) $\Rightarrow$ (6).

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ (6) $\Rightarrow$ (5).

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ (5) $\Rightarrow$ (7).

(d) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ (7) $\Rightarrow$ (5).

(e) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ (6) $\Leftrightarrow$ (7).

Justifiez chacune de vos réponses par une preuve ou un contre-exemple.

(5) $\Rightarrow$ (6). Supposons[1] (5) et prouvons (6). Posons $R_1 := -R$ et $R_2 := R$ où R est donné par (5). soit $n \in \mathbb{N}$. Par (5), on sait que $|x_n| \leqslant R$, c'est-à-dire que $-R \leqslant x_n \leqslant R$ ou encore que $R_1 \leqslant x_n \leqslant R_2$.
(6) $\Rightarrow$ (5). Prenons $R := \max\{|R_1|, |R_2|\} \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ où R_1 et R_2 sont donnés par (6). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $-R \leqslant -|R_1| \leqslant R_1 \leqslant x_n \leqslant R_2 \leqslant |R_2| \leqslant R$ et donc $|x_n| \leqslant R$.
Montrons que (7) est une tautologie. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, il suffit de prendre $R := |x_n|$ pour avoir $|x_n| \leqslant R$. Par conséquent[2] (5) $\Rightarrow$ (7).
D'autre part, (5) dit que la suite (x_n) est bornée. Or ce n'est par toujours vrai : la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ n'est pas bornée. Par conséquent (7) $\not\Rightarrow$ (5).
Dès lors on n'a pas non plus (6) $\Leftrightarrow$ (7) puisque sinon on aurait (7) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (5) ce qui contredit (d).

Question 6.

(a) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est l'infimum de A ».*

a est l'infimum de A si et seulement si

- $\forall x \in A,\ a \leqslant x$;
- $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A,\ x_n \to a$.

(b) *Calculez $\inf\bigl(]0,4[\, \cap [\sqrt{2}, \pi^2]\bigr)$. Justifiez votre réponse en utilisant la définition que vous avez donnée en (a).*

Nous allons montrer que $\inf\bigl(]0,4[\, \cap [\sqrt{2}, \pi^2]\bigr) = \sqrt{2}$. Tout d'abord, comme $0 < \sqrt{2} < 4 < \pi^2$, on a[3] $]0,4[\, \cap [\sqrt{2}, \pi^2] = [\sqrt{2}, 4[$. Vérifions chacun des deux points de (a) :

[1]Montrer $P \Rightarrow Q$ revient à considérer que P est vraie et, à partir de là, montrer que Q l'est également. Par exemple, pour montrer que (5) $\Rightarrow$ (6), on admet l'existence du R dans (5) et on montre l'existence de R_1 et R_2 dans (6) — et non pas l'inverse ! Cette compréhension du fondement même de ce qui fait preuve est essentiel.

[2]Lorsqu'une proposition P est une tautologie — ici (7) est vraie quel que soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — on a $Q \Rightarrow P$ pour toute proposition Q. Dans le même ordre d'idées, si P est toujours faux, alors $P \Rightarrow Q$ est vrai quel que soit Q.

[3]C'est élémentaire mais il est bon de rappeler que les notions d'intersection ($\cap$) et d'union ($\cup$) sont différentes ! L'ensemble $]0,4[\, \cap [\sqrt{2}, \pi^2]$ est formé des réels appartenant à $]0,4[$ *et* à $[\sqrt{2}, \pi^2]$.

- Soit $x \in [\sqrt{2}, 4[$. On a $\sqrt{2} \leqslant x$ par définition de l'intervalle.
- Prenons pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante $(\sqrt{2})$. Celle-ci est bien constituée d'éléments de l'ensemble puisque $\sqrt{2} \in [\sqrt{2}, 4[$ et $\sqrt{2} \to \sqrt{2}$.

(c) *Calculez* $\inf\{x \in \mathbb{R} : x\sin x > 1\} \in [-\infty, \infty]$. *Justifiez.*

On va prouver que $\inf\{x \in \mathbb{R} : x\sin x > 1\} = -\infty$. Pour ce nous allons montrer que l'ensemble[4] $A := \{x \in \mathbb{R} : x\sin x > 1\}$ n'est pas borné inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ telle que $x_n \to -\infty$. Posons

$$x_n := -\frac{\pi}{2} - 2n\pi$$

On a $x_n \sin x_n = -x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Par ailleurs, les règles de calcul sur les limites impliquent que $x_n \to -\infty$ si $n \to +\infty$. A n'est donc pas borné inférieurement.

Question 7. *On est intéressé par les deux propriétés suivantes au sujet d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\forall x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x > 1/n \tag{8}$$

$$\exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall x \in A,\ x > 1/n \tag{9}$$

- *Pour chacun des ensembles ci-après, dites si* (8) *et/ou* (9) *est vérifié. Donnez à chaque fois une preuve de vos affirmations.*

$$A_1 =]2,5], \qquad A_2 =]0, \tfrac{1}{2}[$$

  - ► A_1 vérifie (8). Soit $x \in A_1$. Prenons $n := 1$. Comme $x \in A_1$ implique $x > 2$, on a bien $x > 1 = \frac{1}{n}$.
  - ► A_2 vérifie (8). Soit $x \in A_2$. Posons $n := \lceil 1/x \rceil + 1$. Comme $x > 0$, on a $x \neq 0$ et $1/x > 0$ si bien que $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Vu que $n > \lceil 1/x \rceil \geqslant 1/x$ et que $x \geqslant 0$ et $n > 0$, on en conclu que $x > 1/n$.
  - ► A_1 vérifie (9). Prenons $n := 1$. Soit $x \in A_1$. Comme $x > 2$, on a en particulier que $x > 1 = \frac{1}{n}$.
  - ► A_2 ne vérifie pas (9). Il faut donc montrer[5] que la négation de (9) est vérifiée, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \exists x \in A_2,\ x \leqslant \frac{1}{n}$$

    Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Posons $x := \min\{\frac{1}{n}, \frac{1}{4}\}$. Comme $0 < x \leqslant \frac{1}{4}$, on a bien $x \in A_2$. De plus, on a aussi $x \leqslant \frac{1}{n}$ (par la définition du minimum).

- *Montrez que si A vérifie* (9)*, alors* $0 \notin A$.

En effet, si 0 appartenait à A, (9) impliquerait qu'il existe un $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $0 > 1/n$. C'est une contradiction (puisque $1/n > 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$). On n'a donc pas que $0 \in A$.

[4] Cet ensemble est formé des réels x vérifiant $x\sin x > 1$ et non pas des valeurs > 1 prises par $x\sin x$. Symboliquement : $\{x \in \mathbb{R} : x\sin x > 1\} \neq \{x\sin x : x \in \mathbb{R} \text{ et } x\sin x > 1\}$.

[5] Il est impératif de comprendre que pour montrer qu'une propriété du type $\exists n,\ P(n)$ est fausse, il ne suffit pas de prendre une valeur n^* pour n et de montrer qu'elle ne marche pas (i.e. qu'on a $\neg P(n^*)$). En effet, $\exists n,\ P(n)$ signifie qu'*à condition de bien choisir n*, on peut avoir $P(n)$. Du fait que $P(n^*)$ est faux, on peut juste conclure que n^* n'est pas un bon n. Pour montrer que $\exists n,\ P(n)$ est faux, il faut prouver qu'il n'y a aucun bon n, c'est-à-dire que tous les n sont mauvais : $\forall n,\ \neg P(n)$.

- *Peut-on affirmer que si un ensemble A vérifie (9), alors A est borné inférieurement ? Justifiez votre réponse (qu'elle soit positive ou négative).*

  Oui. Nous allons montrer que si A vérifie (9), alors 0 est une borne inférieure pour A, c'est-à-dire que $A \subseteq [0,+\infty[$. En effet, si $x \in A$, alors (9) nous dit que $x > 1/n$ pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donc $x \geqslant 0$ i.e. $0 \in [0,+\infty[$.

REMARQUES :

- (8) est équivalent à $A \subseteq]0,+\infty[$.
- (9) est équivalent à $\exists r > 0,\ A \subseteq]r,+\infty[$.

Question 8.

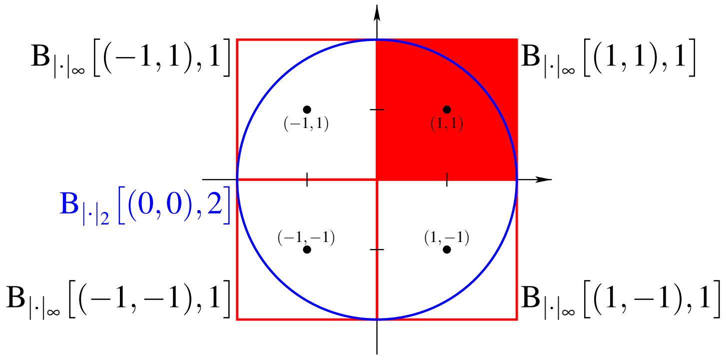
(a) *Soit $a \in \mathbb{R}^N$, $R \in \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Définissez $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[a,R]$.*

$$\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[a,R] = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x-a\| \leqslant R\}$$

(b) *Dessinez, sur un même graphe, les cinq boules de $\mathbb{R}^2$ ci-après :*

$$\mathrm{B}_{|\cdot|_2}[0,2],\quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,1),1\big],\quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,1),1\big],\quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,-1),1\big],\quad \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,-1),1\big].$$

Veillez à ce que votre dessin soit clair. Il n'est pas nécessaire de justifier vos constructions.



Toutes les boules sont pleines[6] même si seule $\mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,1),1\big]$ est dessinée explicitement comme telle pour une question de lisibilité.

(c) *Montrez par calcul que*

$$\mathrm{B}_{|\cdot|_2}[0,2] \subseteq \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,1),1\big] \cup \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,1),1\big] \cup \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,-1),1\big] \cup \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,-1),1\big].$$

Soit $x = (x_1,x_2) \in \mathrm{B}_{|\cdot|_2}[0,2]$, c'est-à-dire que $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2^2$. Donc $x_1^2 \leqslant 2^2$ et $x_2^2 \leqslant 2^2$, c'est-à-dire, en prenant la racine de chaque coté, $|x_1| \leqslant 2$ et $|x_2| \leqslant 2$, ou encore $-2 \leqslant x_i \leqslant 2$ ($i = 1,2$). Nous allons distinguer quatre cas.

- Si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$, nous allons montrer que $(x_1,x_2) \in \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(1,1),1\big]$. En effet, comme $0 \leqslant x_i \leqslant 2$, on a $-1 \leqslant x_i - 1 \leqslant 1$ et donc $|x_i - 1| \leqslant 1$ ($i = 1,2$). Donc $|x-(1,1)|_\infty = \max\{|x_1-1|, |x_2-1|\} \leqslant 1$.
- Si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$, on a $-2 \leqslant x_i \leqslant 0$ et donc $-1 \leqslant x_i + 1 \leqslant 1$, d'où $|x_i + 1| \leqslant 1$ ($i = 1,2$). Par conséquent $|x-(-1,-1)|_\infty = \max_{i=1,2}|x_i+1| \leqslant 1$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{B}_{|\cdot|_\infty}\big[(-1,-1),1\big]$.
- Les deux autres cas « $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$ » et « $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$ » sont similaires.

Question 9.

Parmi les propriétés suivantes, cochez toutes celles qui disent que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

[6] Il est important de noter que les boules sont fermées — sans quoi l'affirmation dela partie (c) n'est plus vraie.

(a) ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \Rightarrow x_n \geqslant x_m$

(b) ☑ $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \Rightarrow x_n \geqslant x_m$

(c) ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_n - 1$

(d) ☑ $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_n$

(e) ☐ $\exists \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_0 - n\alpha$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]0,+\infty[$ une suite convergeant vers 0. Montrez qu'il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $x'_n \to 0$.

Il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante puisque toute sous-suite converge vers la même limite que la suite initiale. On sait que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n^* \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n^*,\ x_n \leqslant \varepsilon \tag{10}$$

(ceci vient de la définition de $x_n \to 0$ en prenant en compte le fait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]0,+\infty[$). Construisons à présent la sous-suite. Posons $n_0 := 0$ et $x'_0 := x_{n_0} = x_0$. De (10) avec $\varepsilon = x_0 > 0$, on trouve qu'il existe un n^* tel que $\forall n \geqslant n^*,\ x_n \leqslant x_{n_0}$. Posons $n_1 := \max\{n^*, n_0+1\}$ et $x'_1 := x_{n_1}$. On poursuit de la même manière. Plus précisément, on suppose qu'on a $x'_i = x_{n_i}$ pour $i = 0, 1, \ldots, k$ avec $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ et $x_{n_0} \geqslant x_{n_1} \geqslant \cdots \geqslant x_{n_k}$ et on construit $x'_{k+1} := x_{n_{k+1}}$ avec $n_k < n_{k+1}$ et $x_{n_k} \geqslant x_{n_{k+1}}$. Pour cela, on prend $\varepsilon = x_{n_k} > 0$ dans (10), ce qui nous donne un n^* tel que

$$\forall n \geqslant n^*,\ x_n \leqslant x_{n_k}$$

et on pose $n_{k+1} := \max\{n^*, n_k+1\} > n_k$.
Comme la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $(x'_k) = (x_{n_k})$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $x_{n_{k+1}} \leqslant x_{n_k}$ pour tout k, la propriété (d) ci-dessus dit que la suite $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

REMARQUE : Une suite de $]0,+\infty[$ peut converger vers 0 sans être décroissante. (Pouvez-vous donner une telle suite ?)