Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Tout résultat du cours peut bien évidemment être utilisé (veuillez y faire référence clairement).
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. /6

- Définissez « f est continue en a » en termes de ε-δ.

- Utilisez cette définition pour montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 y$ est continue en $(0,0)$.

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez chacune de vos réponses par une preuve ou un contre-exemple. /7

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas croissante est strictement décroissante.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, elle est dérivable sauf peut-être en 0.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,\ f(x+\varepsilon) = f(x)$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est pas ouvert est nécessairement fermé.

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/6

Question 3. On considère les quatre propriétés suivantes. Pour chacune d'entre elles, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre choix par une preuve.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ 1/x \leqslant n$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in]0,+\infty[,\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1/x \leqslant n$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists x \in]0,+\infty[,\ 1/x \leqslant n$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1/x \leqslant n$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. /6

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est fermé ».

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est borné ».

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(x,y) = \big(|x| + |y|\big)\big(2 + \sin(xy)\big)$$

Prouvez que l'ensemble $C := \{(x,y) : f(x,y) \leqslant 5\}$ est compact. Justifiez en détail.

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Soit $p(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_4, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Prouvez que p possède au moins une racine réelle. Veillez à justifier avec précision chacune de vos affirmations (un raisonnement justifié uniquement par un dessin n'est donc pas suffisant). /6

(INDICATION : commencez par démontrer que $p(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $p(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

/8

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Définissez « f est une fonction paire » (avec tous les quantificateurs éventuellement nécessaires).

- Définissez « f est une fonction impaire » (avec tous les quantificateurs éventuellement nécessaires).

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R}$, montrez qu'il existe un $s \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(s) = 0$.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Prouvez : f est paire $\Leftrightarrow$ $\partial f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire. (INDICATION : pour l'implication « $\Leftarrow$ », dériver la fonction $x \mapsto f(x) - f(-x)$.)

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7. /6

- Définissez « f est un petit o de x lorsque $x \to 0$ ».

- Montrez, en utilisant la définition précédente, que $o(x) + o(x) = o(x)$.

- Peut-on conclure de l'égalité précédente que $o(x) = 0$? Pourquoi ?

- Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a-t-on $\dfrac{1}{1-x} = \alpha + \beta x + o(x)$ lorsque $x \to 0$. Prouvez vos affirmations.

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 8. /5

- Définissez « la fonction $u : I \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire $\partial_t u = f(t,u)$ » où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Vérifiez que la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

est solution de l'équation

$$\partial_t u = \sqrt[3]{u} \tag{1}$$

Justifiez votre réponse.

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et barrer la section inutile sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur. Tout résultat du cours peut bien évidemment être utilisé (veuillez y faire référence clairement).
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. $/6$

- Définissez « f est continue en a » en termes de ε-δ.

- Utilisez cette définition pour montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

/6

Question 2. On considère les quatre propriétés suivantes. Pour chacune d'entre elles, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez à chaque fois votre choix par une preuve.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ 1/x \leqslant n$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in]0,+\infty[,\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1/x \leqslant n$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists x \in]0,+\infty[,\ 1/x \leqslant n$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1/x \leqslant n$

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 3.

/7

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est fermé » (avec tous les quantificateurs éventuellement nécessaires).

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est borné » (avec tous les quantificateurs éventuellement nécessaires).

- En utilisant les définitions ci-dessus, dites si les ensembles suivants sont fermés et/ou bornés :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \{\pi, \pi+1, \pi+2\}.$$

- Les ensembles A et B sont-ils compacts ? Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax^2 + x - 1$ où a est un paramètre réel positif. $/8$

(a) Montrez que $f(1+a) > 0$.

(b) Prouvez : $\exists \xi \in \,]0, +\infty[,\ f(\xi) = 0$.

(c) Calculez la fonction $\partial f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) Montrez que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(e) Prouvez : $\exists! \xi \in \,]0, +\infty[,\ f(\xi) = 0$. Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 5.

/6

- Définissez $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(a,\rho)$ et $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}[a,\rho]$.

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

  (a) $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B_{\|\cdot\|}(x,r) \subseteq A$

  (b) $\forall x \in A,\ \exists r' > 0,\ B_{\|\cdot\|}[x,2r'] \subseteq A$

  Veillez à la précision de vos justifications.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

/6

Question 6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez chacune de vos réponses par une preuve ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ On a nécessairement que $f([a,b]) = \big[f(a), f(b)\big]$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ On a nécessairement que $f([a,b]) = \big[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\big]$.

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 7.

/6

- Définissez « f est un petit o de x lorsque $x \to 0$ ».

- Montrez, en utilisant la définition précédente, que $\mathrm{o}(x) + \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(x)$.

- Peut-on conclure de l'égalité précédente que $\mathrm{o}(x) = 0$? Pourquoi ?

- Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a-t-on $\dfrac{1}{1-x} = \alpha + \beta x + \mathrm{o}(x)$ lorsque $x \to 0$. Prouvez vos affirmations.

Analyse mathématique I

Coté (20 mars 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 8. /5

- Définissez « la fonction $u : I \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire $\partial_t u = f(t,u)$ » où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Vérifiez que la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

  est solution de l'équation

$$\partial_t u = \sqrt[3]{u} \qquad (1)$$

  Justifiez votre réponse.