Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2006)

Nom : ______________
Prénom : ______________
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /5

(a) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^M$. Définissez, en ε-δ, « $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ ».

(b) En utilisant la définition précédente, prouvez que $x^2y^3\cos(x\cos y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

/15

Question 2. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les résultats que vous utilisez.

(a) Si A est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et $\sup A \in \mathbb{R}$, alors $\sup A \in A$.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\forall \varepsilon > 0,\ |a-b| \leqslant \varepsilon$, alors $a = b$.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

(d) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, alors $\exists n^* \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n^*,\ x_n > 0$.

(e) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède une dérivée positive ou nulle en tout point de $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2006)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 3. Calculez le développement de Taylor d'ordre 2 en $x = \pi$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x \, \frac{e^{x-\pi}}{1 - \sin x}$$

Donnez le lien entre ce développement de Taylor et la fonction f en termes de petit o.

/6

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle /7

$$\partial_t^2 x(t) - 2\partial_t x(t) + x(t) = \operatorname{sh} t$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5. Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leqslant 0\}$. Pour chacune des propriétés ci-dessous, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse et justifiez votre choix par une démonstration.

/10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \subseteq A$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists r > 0,\ \forall x \in A,\ \mathrm{B}(x,r) \subseteq A$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing\big) \Rightarrow x \in A$

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap \complement A \neq \varnothing$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/6

Question 6. Montrez que l'équation $e^x = -x$ possède une et une seule solution. Illustrez par un graphique commenté le fait que cette équation possède une unique solution.
(Indication : pour prouver l'unicité, écrivez l'équation sous la forme $f(x) = 0$ et montrez que f est strictement croissante. Le lien entre cette indication et la question posée doit être explicitement établi.)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/4

Question 7. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto \left(xy\sin(\pi x \mathrm{e}^y), \sqrt[3]{x^2 - y^2 + 1}, \operatorname{tg} x^2\right)$$

au point $(1,0)$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le polynôme /6

$$p(x) := -1 + 4x - 2x^2$$

est le développement de Taylor de f en 1 d'ordre 2.

(a) Donnez la valeur de $f(1)$. Justifiez votre réponse.

(b) Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point $\big(1, f(1)\big)$. Justifiez votre réponse.

(c) Dites si la fonction f atteint en 1 un minimum local, un maximum local, ou ni l'un ni l'autre. Justifiez votre réponse.

Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2006)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Mathématique

Question 9. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Prouvez l'équivalence suivante : $/6$

$$A \text{ est compact} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{pour tout intervalle (éventuellement non borné) } I \text{ de } \mathbb{R} \\ \text{tel que } A \cap I \neq \varnothing,\ \sup(A\cap I) \in A \text{ et } \inf(A\cap I) \in A. \end{cases}$$

Indications : Pour « $\Leftarrow$ », commencez par montrer que A est borné. Rappelez vous aussi que, de toute suite convergente de $\mathbb{R}$,[1] on peut extraire une sous-suite monotone.

[1] C'est aussi vrai si la suite n'est pas convergente mais on ne l'a pas vu.

Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2006)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. $\big/5$

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Définissez, en ε-δ, « $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ ».

(b) En utilisant la définition précédente, prouvez que $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$.

Analyse mathématique I

Examen (1ier juin 2006)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 2. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les résultats que vous utilisez. /15

(a) Si A est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et $\sup A \in \mathbb{R}$, alors $\sup A \in A$.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\forall \varepsilon > 0,\ |a-b| \leqslant \varepsilon$, alors $a = b$.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

(d) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, alors $\exists n^* \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n^*,\ x_n > 0$.

(e) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède une dérivée positive ou nulle en tout point de $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 3. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction /6

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1 + \operatorname{sh} x}$$

Donnez le lien entre ce développement de Taylor et la fonction f en termes de petit o.
(Rappelons que $\operatorname{sh} x = (\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})/2$.)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 4. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle

/7

$$\partial_t^2 x(t) - 2\partial_t x(t) + x(t) = \operatorname{sh} t$$

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 5. Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leqslant 0\}$. Pour chacune des propriétés ci-dessous, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse et justifiez votre choix par une démonstration. /10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \subseteq A$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists r > 0,\ \forall x \in A,\ \mathrm{B}(x,r) \subseteq A$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing\big) \Rightarrow x \in A$

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap \complement A \neq \varnothing$

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/6

Question 6. Montrez que l'équation $e^x = -x$ possède une et une seule solution. Illustrez par un graphique commenté le fait que cette équation possède une unique solution.
(Indication : pour prouver l'unicité, écrivez l'équation sous la forme $f(x) = 0$ et montrez que f est strictement croissante. Le lien entre cette indication et la question posée doit être explicitement établi.)

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

/8

Question 7. On considère l'énoncé suivant :

> Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Si, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_{n+1} - a_n| \leqslant 1/2^n$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Veuillez compléter la démonstration suivante par les arguments et les calculs nécessaires.

Démonstration. Commençons par prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ |a_{n+k} - a_n| \leqslant 1/2^{n-1}$. Soient $n, k \in \mathbb{N}$. On a

$$|a_{n+k+1} - a_n| = \Big|\sum_{i=0}^{k} a_{n+i+1} - a_{n+i}\Big| \quad \text{car}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k} |a_{n+i+1} - a_{n+i}| \quad \text{car}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k} 2^{-(i+n)} \quad \text{car}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{car}$$

On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, Question 8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le polynôme /6

$$p(x) := -1 + 4x - 2x^2$$

est le développement de Taylor de f en 1 d'ordre 2.

(a) Donnez la valeur de $f(1)$. Justifiez votre réponse.

(b) Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point $\big(1, f(1)\big)$. Justifiez votre réponse.

(c) Dites si la fonction f atteint en 1 un minimum local, un maximum local, ou ni l'un ni l'autre. Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 9. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction /4

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto \big(xy \sin(\pi x \mathrm{e}^y), \sqrt[3]{x^2 - y^2 + 1}, \operatorname{tg} x^2\big)$$

au point $(1, 0)$.