Analyse mathématique I

Examen (16 août 2006)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{adh}(\operatorname{Dom} f)$ et $b \in \mathbb{R}$. /5

(a) Définissez, en ε-δ, « $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ ».

(b) En utilisant la définition précédente, prouvez que si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b > 0$, alors $\sqrt{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \sqrt{b}$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les résultats que vous utilisez. /12

(a) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers x et y. Démontrez que la suite $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + y$.

(b) Établissez que $\big(1 + \mathrm{o}(x)\big)^2 = 1 + \mathrm{o}(x)$ lorsque $x \to 0$. Veillez à la qualité de vos explications.

(c) Donnez la définition de fermé en terme de boules. À partir de celle-ci, prouvez que l'intersection de deux fermés est un fermé.

(d) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $\sup A$ existe et appartient à $\mathbb{R}$, alors on a : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists b \in A,$ $b \in \mathrm{B}(\sup A, \varepsilon)$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$ de la fonction $/6$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(e^{x-1} - 1)$$

Donnez le lien entre ce développement de Taylor et la fonction f en termes de petit o.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle /7

$$\partial_t^2 u(t) - 5\partial_t u(t) = \cos t + t$$

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Indentifiez la ou les phrases quantifiées (en cochant la case qui précède) qui *tra-dui(sen)t* le fait « $x+x^5 \geqslant 1$ pour x suffisament proche de 1 » : /5

(a) ☐ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x,\ x > 1-\varepsilon \Rightarrow x+x^5 \geqslant 1$

(b) ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x,\ x > 1-\varepsilon \Rightarrow x+x^5 \geqslant 1$

(c) ☐ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x,\ 1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon \Rightarrow x+x^5 \geqslant 1$

(d) ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x,\ 1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon \Rightarrow x+x^5 \geqslant 1$

(e) ☐ $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \to 1 \Rightarrow \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n + x_n^5 \geqslant 1$

(f) ☐ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \to 1 \Rightarrow \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n + x_n^5 \geqslant 1$

Parmi la ou les cases (a)–(f) cochées ci-dessus, choisissez-en une et prouvez qu'elle est vraie.

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 6. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 - 4\,\mathrm{e}^{x} + 3\,\mathrm{e}^{2x}$$

/8

(a) Calculez $f(0)$, $\partial f(0)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Esquissez le graphe de f.

(c) Prouvez que f possède une racine non nulle. Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 7. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction

/4

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (u,v,t) \mapsto \left(\cos\sqrt{u^2+v^3-t}, \ln\frac{u}{v+t}\right)$$

au point $(1,1,1)$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/6

Question 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y)$ et $(x_0, y_0) \in \operatorname{Dom} f$.

(a) Montrez que si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe et si, pour tout y proche de y_0, $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ existe, alors

$$\lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big)$$

existe et vaut $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

(b) Montrez qu'on ne peut se passer de l'hypothèse « $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ existe pour y proche de y_0 », c'est-à-dire qu'on n'a *pas*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ existe} \quad\Rightarrow\quad \exists\delta>0,\ \forall y\in\,]y_0-\delta, y_0+\delta[,\ \lim_{x\to x_0} f(x,y) \text{ existe}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 9. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Établissez que

$$\big(\exists r > 0,\ \forall x \in A,\ \mathrm{B}(x,r) \subseteq A\big) \quad \Leftrightarrow \quad A = \varnothing \text{ ou } A = \mathbb{R}$$

$/6$

Analyse mathématique I

Examen

(16 août 2006)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1.

/5

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Définissez, en ε-δ, « $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ ».

(b) En utilisant la définition précédente, prouvez que $\sqrt{x^2+1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

Analyse mathématique I

Examen (16 août 2006)

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 2. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les résultats que vous utilisez.

/12

(a) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers x et y. Démontrez que la suite $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + y$.

(b) Établissez que $\bigl(1 + \mathrm{o}(x)\bigr)^2 = 1 + \mathrm{o}(x)$ lorsque $x \to 0$. Veillez à la qualité de vos explications.

(c) Donnez la définition de fermé en terme de boules. À partir de celle-ci, prouvez que l'intersection de deux fermés est un fermé.

(d) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $\sup A$ existe et appartient à $\mathbb{R}$, alors on a : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists b \in A,\ b \in \mathrm{B}(\sup A, \varepsilon)$.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 3. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$ de la fonction

/6

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(\mathrm{e}^{x-1} - 1)$$

Donnez le lien entre ce développement de Taylor et la fonction f en termes de petit o.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 4. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle /7

$$\partial_t^2 u(t) - 5\partial_t u(t) = \cos t + t$$

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 5. Indentifiez la ou les phrases quantifiées (en cochant la case qui précède) qui *tradui(sen)t* le fait « $x + x^5 \geqslant 1$ pour x suffisament proche de 1 » :

/5

(a) ☐ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x,\ x > 1 - \varepsilon \Rightarrow x + x^5 \geqslant 1$

(b) ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x,\ x > 1 - \varepsilon \Rightarrow x + x^5 \geqslant 1$

(c) ☐ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x,\ 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon \Rightarrow x + x^5 \geqslant 1$

(d) ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x,\ 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon \Rightarrow x + x^5 \geqslant 1$

(e) ☐ $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \to 1 \Rightarrow \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n + x_n^5 \geqslant 1$

(f) ☐ $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \to 1 \Rightarrow \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n + x_n^5 \geqslant 1$

Parmi la ou les cases (a)–(f) cochées ci-dessus, choisissez-en une et prouvez qu'elle est vraie.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/8

Question 6. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 - 4\,e^{x} + 3\,e^{2x}$$

(a) Calculez $f(0)$, $\partial f(0)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Esquissez le graphe de f.

(c) Prouvez que f possède une racine non nulle. Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 7. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$.

/8

(a) Définissez « A est ouvert ».

(b) Définissez « A est fermé ».

(c) Définissez « A est borné ».

En utilisant les définitions précédentes, dites si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés, et/ou compacts.

(a) $A = \left]-5, 2\right[$

(b) $B = \left\{\pi - \mathrm{e}^n : n \in \mathbb{Z}\right\}$

(c) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 3\right\}$

Analyse mathématique I

Examen (16 août 2006)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 8. Soit la famille de fonctions $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f_\mu(x) = x^5 + \mu x^3$$

où μ est un paramètre réel.

(a) Calculez, en fonction de μ, $\lim_{x \to +\infty} \partial f_\mu(x)$.

(b) Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de μ la fonction f_μ est strictement monotone. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 9. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction

/4

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (u,v,t) \mapsto \left(\cos\sqrt{u^2+v^3-t}, \ln\frac{u}{v+t}\right)$$

au point $(1,1,1)$.