Analyse mathématique I

Examen (20 janvier 2007)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas mentionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1.

/3

(a) Définissez « $\mathbb{R}$ est complet ».

(b) Définissez « la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est bornée ».

(c) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Pour chacune des suites ci-dessous, calculez sa limite au sens large si elle existe. Détaillez les différentes étapes de vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/6

- $\left(\dfrac{n^2+\sin n}{1-n^2}\right)_{n\geqslant 2}$

- $\left(n!-2^n\right)_{n\geqslant 0}$

- $\left(\dfrac{(-2)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$

Analyse mathématique I

Examen (20 janvier 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

/10

(a) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant cette définition, montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ converge vers 0. Veillez à la qualité de votre rédaction.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite).

(c) Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculez en la limite. Expliquez votre démarche.

(d) Montrez que la définition donnée en (a) est équivalente à

$$\forall \varepsilon_1 \in \,]0,1[,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon_1$$

Analyse mathématique I

Examen (20 janvier 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit $x_0 \in [1, +\infty[$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant à x_0 par la récurrence

/5

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{x_n + 3}$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnez la valeur de sa limite. Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n^2(\lambda - 2)^n$ où λ est un paramètre réel. Étudiez la convergence *au sens large* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de λ. Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donnez la valeur de sa limite. Justifiez toutes vos réponses.

/6

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Pour chaque question, énoncez clairement les définitions et les résultats utilisés. /12

(a) Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$ et $x_n \to 0$. Montrez que $1/x_n \to +\infty$.

(b) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrez, à partir des définitions, qu'on ne peut pas avoir simultanément $x_n \to a$ et $x_n \to -\infty$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite).

(c) Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers π. Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(d) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ qui converge vers $-\infty$, alors A n'est pas un ensemble borné inférieurement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7.

/9

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le suprémum de A ».

(b) Calculez $\sup\,]3,\pi[$. Justifiez votre réponse en utilisant la définition que vous avez donnée en (a).

(c) Calculez $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1+x} \in \mathbb{N}\} \in [-\infty,+\infty]$. Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7 (suite).

(d) Soient $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que $\sup A \leqslant \sup B$. Détaillez vos arguments en énoncant les résultats prouvés au cours dont vous avez besoin.
REMARQUE : Veillez à ne pas oublier que les suprémums ne sont pas nécessairement des nombres réels.

Analyse mathématique I

Examen (20 janvier 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/6

Question 8. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{5^{n+3}}{(n+1)!}$$

Dites si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie ou non chacune des affirmations suivantes. Donnez pour chacune d'entre elles une preuve de votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite (x_n) est croissante.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists R_1, R_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ R_1 \leqslant x_n \leqslant R_2$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists R \in \mathbb{R},\ x_n \leqslant R$