# Analyse mathématique I

## Examen (20 janvier 2007) **Correction**

Question 1.

*(a)* *Définissez « $\mathbb{R}$ est complet ».*

$\mathbb{R}$ est complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe un $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \to x^*$).

*(b)* *Définissez « la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est bornée ».*

$$\exists R > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant R$$

*(c)* *Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».*

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ si c'est une fonction de $\mathbb{R}^N$ (définie sur tout $\mathbb{R}^N$) dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\| \geqslant 0$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Question 2. *Pour chacune des suites ci-dessous, calculez sa limite au sens large si elle existe. Détaillez les différentes étapes de vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.*

- $\left(\dfrac{n^2+\sin n}{1-n^2}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers $-1$.

  En effet, on peut écrire

$$\frac{n^2+\sin n}{1-n^2} = \frac{1+\frac{\sin n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1} \to \frac{1}{-1} = -1$$

  La limite provient de la règle du quotient car le numérateur tend vers 1 (car $|\frac{\sin n}{n^2}| \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0$ ; donc $\frac{\sin n}{n^2} \to 0$ par convergence dominée ; donc $1 + \frac{\sin n}{n^2} \to 1$ par la règle sur les limites de sommes) et le dénominateur tend vers $-1$ (car $\frac{1}{n^2} \to 0$ et donc $\frac{1}{n^2} - 1 \to -1$ par la règle des limites de sommes).

  REMARQUE. On peut aussi utiliser le théorème « du sandwich » en remarquant que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, il découle de $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ que $n^2 - 1 \leqslant n^2 + \sin n \leqslant n^2 + 1$ et donc, en *faisant attention* à ce que $1 - n^2 < 0$ (car on travaille avec $n \geqslant 2$), on a

$$-1 \geqslant \frac{n^2+\sin n}{1-n^2} \geqslant \frac{n^2+1}{1-n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

  où la convergence du terme de droite se prouve comme ci-dessus (on divise le numérateur et le dénominateur par $n^2$, etc.).

- $\left(n! - 2^n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers $+\infty$

  En effet,

$$0 \leqslant \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}^{n \text{ fois}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = 2\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n} \leqslant 2\cdot\frac{2}{n} \to 0$$

  et donc, par convergence dominée, $2^n/n! \to 0$ ([1]). Par conséquent $n! - 2^n = n!\left(1 - \frac{2^n}{n!}\right) \to +\infty \cdot 1 = +\infty$ par la règle sur la limite d'un produit (pour les limites infinies).

  REMARQUES. Si on essaye de calculer la limite termes à termes (i.e. $\lim n! - \lim 2^n$), on obtient le cas d'indétermination $(+\infty) - (+\infty)$. C'est une erreur grave (et qui montre qu'on n'écoute pas ce qui est dit au cours vu qu'on a insisté là dessus) que de dire que, dès lors, la limite n'existe pas ou est « indéterminée » (une limite n'est jamais indéterminée, elle existe — auquel cas elle vaut un nombre bien précis — ou non — auquel cas, parler de la valeur de la limite n'a pas de sens).

  L'indétermination vient du fait qu'on a appliqué la règle qui dit que la limite d'une somme est la somme des limites *alors qu'on ne pouvait pas* car les hypothèses sur les limites de chacun des termes de la somme ne sont pas vérifiées (voir les théorèmes sur les limites infinies). Il faut donc reprendre les calculs à l'endroit où on n'a pas encore appliqué cette règle (ici tout au début) et choisir une voie différente pour analyser l'expression (ici en exprimant par une factorisation que, dans l'expression $n! - 2^n$, c'est $n!$ qui est le terme dominant).

  Similairement, on ne peut prétendre de $(+\infty) - (+\infty)$ que la limite vaut $+\infty$ car le premier gagne forcément... En effet, $(+\infty) - (+\infty)$ ne vaut pas toujours $+\infty$ (c'est bien pour cela qu'on ne lui a pas donné de valeur), si ici la réponse est $+\infty$, on ne peut déduire cette valeur de l'expression $(+\infty) - (+\infty)$, il faut remonter à $n! - 2^n$ et faire le raisonnement ci-dessus.

- $\left(\frac{(-2)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.

  En effet, la sous-suite pour les $n$ pairs

$$\frac{(-2)^{2n}}{2n} = \frac{2^n \cdot 2^n}{2n} \geqslant 2^n \to +\infty$$

  (où l'inégalité résulte du fait qu'on prouve aisément par récurrence que $2^n \geqslant 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$), tandis que pour la sous-suite pour les $n$ impairs

$$\frac{(-2)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-2\cdot 4^n}{2n+1} \leqslant -2^n \to -\infty$$

  Comme les limites des deux sous-suites sont différentes (elles valent $+\infty$ et $-\infty$ respectivement par convergence dominée), la suite initiale ne peut converger.

[1] On peut aussi directement utiliser le fait, vu au cours, qui affirme que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^n/n! \to 0$. Ici, $a = 2$.

Question 3. *Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.*

(a) *Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers $a$ ».*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

(b) *En utilisant cette définition, montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ converge vers $0$. Veillez à la qualité de votre rédaction.*

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $n_0 := \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $n \geqslant n_0$. Montrons qu'on a bien $|x_n - 0| \leqslant \varepsilon$. En effet, puisque $n \geqslant n_0 \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$, on en déduit que $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et par conséquent on a

$$\begin{aligned}
|x_n| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n+1}\right| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} && (|x| = x \text{ lorsque } x \geqslant 0) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && \text{(calculs ci-dessus)} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

(c) *Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge-t-elle ? Si oui, calculez en la limite. Expliquez votre démarche.*

On constate que le terme $-\frac{1}{k+1}$ de $x_k$ est compensé par le $\frac{1}{k+1}$ de $x_{k+1}$ et donc on a

$$\begin{aligned}
y_n &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + +x_{n-1} + x_n \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Par conséquent $y_n \to 1$ vu que $\frac{1}{n+1} \to 0$ (et on peut alors utiliser la règle sur les limites de sommes).

(d) *Montrez que la définition donnée en (a) est équivalente à*

$$\forall \varepsilon_1 \in \left]0,1\right[,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon_1 \tag{2}$$

Il faut montrer deux implications.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $\varepsilon_1 \in \left]0,1\right[$. Par (1) avec $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$, on sait qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - a| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

  Prenons $n_1 := n_0$. Soit $n > n_1$. Montrons que $|x_n - a| \leqslant \varepsilon_1$. Vu que $n > n_1$, on a en particulier que $n \geqslant n_0$ et donc, étant donné (3), $|x_n - a| \leqslant \varepsilon = \varepsilon_1$.

- (2) $\Rightarrow$ (1). Soit $\varepsilon > 0$. Par (2) avec $\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\} \in ]0,1[$, on sait qu'il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n > n_1, \quad |x_n - a| \leqslant \varepsilon_1 \tag{4}$$
Prenons $n_0 := n_1 + 1$. Soit $n \geqslant n_0$. Montrons que $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$. Vu que $n \geqslant n_0$, on a $n \geqslant n_1 + 1 > n_1$ et donc, grâce à (4), $|x_n - a| \leqslant \varepsilon_1$. Or $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\} \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on a bien $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Question 4. *Soit $x_0 \in [1, +\infty[$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant à $x_0$ par la récurrence*
$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{x_n + 3}$$
*Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnez la valeur de sa limite. Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.*

On va procéder en trois étapes :

(a) On va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée inférieurement par 1.

(b) Par complétude de $\mathbb{R}$, on a alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x^* \in \mathbb{R}$.

(c) Vu que $x_n \geqslant 1$ quel que soit $n$, on a aussi que $x^* \geqslant 1$. Par conséquent, $x^* + 1 \neq 0$ et on peut appliquer la règle sur la limite d'un quotient, ce qui donne
$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3x_n + 1}{x_n + 3} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3x_n + 1}{\lim_{n\to\infty} x_n + 3} = \frac{3x^* + 1}{x^* + 3}$$
On obtient donc une équation sur $x^*$ qu'on peut réécrire comme (car $x^* + 3 > 0$) : $(x^*)^2 = 1$, c'est-à-dire $x^* = 1 \vee x^* = -1$. Vu qu'on sait que $x^* \geqslant 1$, on a forcément que $x^* = 1$.

Il reste à justifier (a). Nous allons établir par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geqslant 1$$

- Cas de base $n = 0$ : Comme il est stipulé que $x_0 \in [1, +\infty[$, il est trivial que $x_0 \geqslant 1$.
- Supposons que $x_n \geqslant 1$ et montrons que $x_{n+1} \geqslant 1$. On a
$$\begin{aligned}
x_{n+1} \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3x_n + 1}{x_n + 3} \geqslant 1 && \text{(définition de } x_{n+1}\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad 3x_n + 1 \geqslant x_n + 3 && \text{(car } x_n \geqslant 1 > 0 \text{ et donc } x_n + 3 > 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad x_n \geqslant 1
\end{aligned}$$
Comme cette dernière propriété est vraie par hypothèse, on a bien que $x_{n+1} \geqslant 1$.

Reste à voir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \leqslant x_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
x_{n+1} \leqslant x_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3x_n+1}{x_n+3} \leqslant x_n && \text{(définition de } x_{n+1}\text{)}\\
&\Leftrightarrow \quad 3x_n+1 \leqslant x_n^2+3x_n && \text{(car } x_n+3>0\text{)}\\
&\Leftrightarrow \quad x_n^2 \geqslant 1
\end{aligned}$$

Comme on a établi que $x_n \geqslant 1$, on en déduit que $x_n^2 \geqslant 1$ et donc que $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Question 5. *Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n^2(\lambda-2)^n$ où $\lambda$ est un paramètre réel. Étudiez la convergence* au sens large *de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $\lambda$. Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donnez la valeur de sa limite. Justifiez toutes vos réponses.*

RAPPEL : Le résultat suivant a été vu en séances d'exercices : si $|a| < 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors $n^k a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

- Du rappel précédent, on conclut immédiatement que, si $|\lambda-2| < 1$, alors $x_n \to 0$. Or $|\lambda-2| < 1$ est équivalent à $-1 < \lambda-2 < 1$, c'est-à-dire à $\lambda \in ]1,3[$.
- Si $\lambda \in [3,+\infty[$, alors $\lambda-2 \geqslant 1$, d'où $(\lambda-2)^n \geqslant 1$ et on a que $x_n \geqslant n^2$. On conclut par convergence dominée que $x_n \to +\infty$.
- Si $\lambda \in ]-\infty,1]$, alors $\lambda-2 \leqslant -1 < 0$. Par conséquent,

  $$x_{2n} = (2n)^2\big((\lambda-2)^2\big)^n \geqslant (2n)^2 1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

  d'où $x_n \to +\infty$ par convergence dominée et

  $$x_{2n+1} = (2n+1)^2 \underbrace{\big((\lambda-2)^2\big)^n}_{\geqslant 1} \underbrace{(\lambda-2)}_{\leqslant -1<0} \leqslant -(2n+1)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

  d'où $x_{2n+1} \to -\infty$ (de nouveau par convergence dominée). Par conséquent la suite $(x_n)$ ne peut converger (même au sens large) car elle possède deux sous-suites ayant des limites différentes.

Question 6. *Pour chaque question, énoncez clairement les définitions et les résultats utilisés.*

(a) *Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$ et $x_n \to 0$. Montrez que $1/x_n \to +\infty$.*

L'hypothèse $x_n \to 0$ se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n| \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

Il faut prouver que $1/x_n \to +\infty$, c'est-à-dire que

$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0,\ \frac{1}{x_m} \geqslant \rho$$

Soit $\rho \in \mathbb{R}$.

- Si $\rho \leqslant 0$, on prend (par exemple) $m_0 = 0$. Pour $m \geqslant 0$, on a bien $1/x_m > 0 \geqslant \rho$.
- Si $\rho > 0$, on utilise (5) avec $\varepsilon = 1/\rho > 0$, ce qui affirme qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |x_n| \leqslant 1/\rho$. Prenons $m_0 := n_0$. Soit $m \geqslant m_0$. Comme $m \geqslant m_0 = n_0$, on a $|x_m| \leqslant 1/\rho$. Mais on sait par hypothèse que $x_m > 0$. Donc $0 < x_m \leqslant 1/\rho$. Par conséquent $1/x_m \geqslant \rho$ comme désiré.

(b) *Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrez, à partir des définitions, qu'on ne peut pas avoir simultanément $x_n \to a$ et $x_n \to -\infty$.*

Supposons au contraire que $x_n \to a$ et $x_n \to -\infty$ simultanément et déduisons en une contradiction. Les hypothèses se traduisent par, respectivement,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - a| \leqslant \varepsilon \tag{6}$$
$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant m_0, \quad x_n \leqslant \rho \tag{7}$$

En utilisant (6) avec $\varepsilon = 1$, on déduit qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant 1$, ou encore
$$\forall n \geqslant n_0, \quad a - 1 \leqslant x_n \leqslant a + 1.$$
Par ailleurs, (7) avec $\rho = a - 2$ implique l'existence d'un $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant m_0, \quad x_n \leqslant a - 2$$
En prenant (par exemple) $n := \max\{n_0, m_0\}$ qui est à la fois plus grand que $n_0$ et $m_0$, on déduit des choix de $n_0$ et $m_0$ faits ci-dessus que
$$a - 1 \leqslant x_n \leqslant a + 1 \quad \text{et} \quad x_n \leqslant a - 2.$$
Par conséquent, on a $x_n \leqslant a - 2 < a - 1 \leqslant x_n$ ce qui est contradictoire (on ne peut avoir $x_n < x_n$).

(c) *Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\pi$. Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

L'hypothèse de convergence vers $\pi$ se traduit par
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - \pi| \leqslant \varepsilon \tag{8}$$
On doit montrer que $(x_n)$ est bornée, c'est-à-dire que
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leqslant C.$$
En utilisant (8) avec $\varepsilon = 1$ (par exemple), on déduit qu'à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $|x_n - \pi| \leqslant 1$. Prenons $C := \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0}|, 1 + \pi\}$ (le maximum existe car l'ensemble est fini) et montrons que, si $n \in \mathbb{N}$, alors $|x_n| \leqslant C$. Soit donc $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \leqslant n_0$, alors il est évident que $|x_n| \leqslant C$ car $|x_n|$ est un des éléments desquels on prend le maximum pour définir $C$.
- Si $n > n_0$, rappelons qu'on a que $|x_n - \pi| \leqslant 1$. Par conséquent, $|x_n| - \pi \leqslant \big||x_n| - |\pi|\big| \leqslant |x_n - \pi| \leqslant 1$ et donc $|x_n| \leqslant 1 + \pi \leqslant C$.

*(d) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ qui converge vers $-\infty$, alors $A$ n'est pas un ensemble borné inférieurement.*

Supposons au contraire qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ telle que $x_n \to -\infty$ et que, malgré tout, $A$ soit borné inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall a \in A,\ a \geqslant C$. Comme, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in A$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geqslant C.$$

En passant à la limite,[2] on a $-\infty \geqslant C$ ce qui contredit le fait que $C \in \mathbb{R}$.

## Question 7.

*(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $a$ est le suprémum de $A$ ».*

$a$ est le suprémum de $A$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- $a$ est un majorant de $A$, c'est-à-dire $\forall x \in A,\ x \leqslant a$ ;
- $a$ est « proche » de $A$ ; plus précisément : $\exists (a_n)_{n\geqslant 1} \subseteq A,\ a_n \to a$.

*(b) Calculez $\sup\,]3,\pi[$. Justifiez votre réponse en utilisant la définition que vous avez donnée en (a).*

Montrons que $\sup\,]3,\pi[\, = \pi$. Il faut vérifier les deux conditions données en (a) :

- $\pi$ est un majorant de $]3,\pi[$. En effet, si $x \in\, ]3,\pi[$, on a par la définition d'intervalle ouvert que $3 < x < \pi$, donc en particulier que $x \leqslant \pi$.
- $\pi$ est « proche » de $]3,\pi[$. Prenons par exemple la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n = \pi - \frac{\pi-3}{n+1}$. Il est facile de vérifier que $(a_n)_{n\geqslant 1} \subseteq A$ (on s'attend à ce que vous fassiez les calculs). Par ailleurs, les règles de calcul sur les limites impliquent que $a_n \to \pi$.

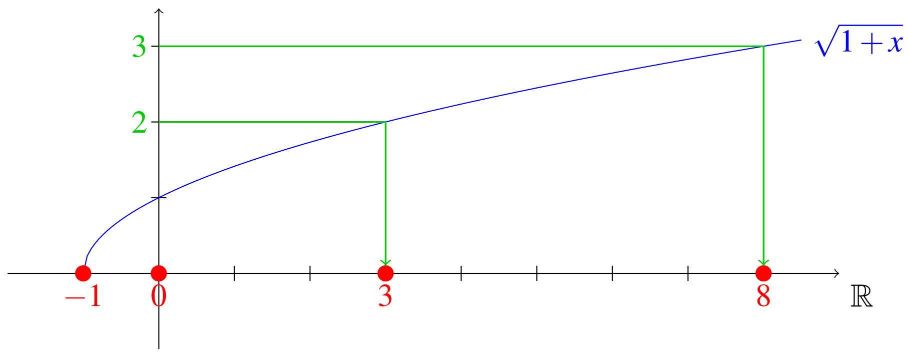
*(c) Calculez $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1+x} \in \mathbb{N}\} \in [-\infty, +\infty]$. Justifiez votre réponse.*

Posons $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1+x} \in \mathbb{N}\}$. Pour répondre à la question, il est utile d'avoir une idée de la forme de $A$. Nous vous proposons deux approches pour cela.

- APPROCHE GRAPHIQUE. On trace le graphe de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+x}$ (en bleu ci-dessous). Les points de $A$ (en rouge[3]) sont les réels pour lesquels $\sqrt{1+x}$ prend une valeur entière, c'est-à-dire l'image inverse de $\mathbb{N}$ par cette fonction. Cela est illustré par le dessin suivant :

[2] On peut aussi le faire directement en utilisant la définition de $x_n \to -\infty$, à savoir $\forall \rho \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \leqslant \rho$. En effet, avec $\rho = C-1$, celle-ci implique qu'à partir d'un certain rang $n_0$, on a $x_n \leqslant C-1$. Mais alors, pour ces $n$, on ne peut avoir $x_n \geqslant C$ comme on l'a déduit dans le texte ci-dessus.

[3] Il faut voir l'axe des abcisses comme l'ensemble $\mathbb{R}$ sur lequel on va mettre en évidence les points de $A$.




On comprend aisément que $A$ n'est pas borné supérieurement, c'est-à-dire que $\sup A = +\infty$. Cependant, pour le montrer plus formellement (ce qui est attendu de votre part), l'approche suivante est nécessaire.

- APPROCHE ALGÉBRIQUE. On commence par donner une forme « paramétrique » à l'ensemble $A$ :

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{1+x} \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N},\ \sqrt{1+x} = n\right\} && \text{(appartenance à un ensemble)} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N},\ x = n^2 - 1\right\} && \text{(résolution de } \sqrt{1+x} = n \text{ en } x\text{)} \\
&= \left\{n^2 - 1 \in \mathbb{R} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} && \text{(écriture équivalente)}
\end{aligned}
$$

À partir de là, on voit que la suite $(n^2-1)_{n\geqslant 0}$ est incluse[4] à $A$ et converge vers $+\infty$. Par conséquent, $A$ est non borné supérieurement (démonstration analogue à celle de la question 6 point (d) et faite au cours) et dans ce cas, on a $\sup A = +\infty$ (par définition).

(d) *Soient $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que $\sup A \leqslant \sup B$. Détaillez vos arguments en énonçant les résultats prouvés au cours dont vous avez besoin.*
REMARQUE : *Veillez à ne pas oublier que les suprémums ne sont pas nécessairement des nombres réels.*

- Si $\sup B = +\infty$, il n'y a rien à prouver car, quel que soit $x \in [-\infty, +\infty]$, on a toujours $x \leqslant +\infty$.
- Si $\sup A = -\infty$, i.e. si $A = \varnothing$, il n'y a rien à prouver non-plus car quel que soit $x \in [-\infty, +\infty]$, on a toujours $-\infty \leqslant x$.
- Il reste à traiter le cas $A \neq \varnothing$ et $\sup B < +\infty$. Comme $A \subseteq B$ et que $A \neq \varnothing$, on a aussi[5] $B \neq \varnothing$ et donc $\sup B > -\infty$. En tenant compte de l'hypothèse $\sup B < +\infty$, on conclut que $\sup B \in \mathbb{R}$. De plus, quel que soit $a \in A$, $a \in B$ et donc $a \leqslant \sup B$ (puisque le suprémum $\sup B$ majore de l'ensemble $B$). Autrement dit, on vient d'établir que

$$\forall a \in A, \quad a \leqslant \sup B \tag{9}$$

Cela signifie que $\sup B$ est un majorant[6] de l'ensemble $A$. Vu que le suprémum est le plus petit des majorants (vu au cours), on a forcément que $\sup A \leqslant \sup B$.

[4] On aurait pu « plaquer » la suite $(n^2-1)_{n\geqslant 0}$ et montrer directement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - 1 \in A$ — car $\sqrt{n^2-1+1} = n \in \mathbb{N}$ — mais nous ne l'avons pas fait pour vous montrer comment on peut trouver la suite en question.

[5] Puisque $A \neq \varnothing$, il existe au moins un élément $a^* \in A$. Mais, vu que $A \subseteq B$, on a aussi $a^* \in B$. Comme $B$ possède au moins l'élément $a^*$, il ne peut être vide.

[6] Il faut rappeler qu'un majorant *est un nombre réel* ! Autrement dit, $+\infty$ n'est *pas* un majorant de $A$. C'est pourquoi il était important d'établir que $\sup B \in \mathbb{R}$.

REMARQUE : On peut aussi conclure ce deuxième point à partir de la définition donnée en (a). En effet, (9) dit que $A$ est borné supérieurement par le réel $\sup B$, donc $\sup A \in \mathbb{R}$ et dès lors la définition donnée en (a) s'applique. On a en particulier l'existence d'une suite $(a_n) \subseteq A$ telle que $a_n \to \sup A$. Vu que $\sup B$ est un majorant de $A$, on a que $\forall n,\ a_n \leqslant \sup B$ et donc, en passant à la limite, que $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup B$.

**Question 8.** *Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{5^{n+3}}{(n+1)!} \tag{10}$$

*Dites si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie ou non chacune des affirmations suivantes. Donnez pour chacune d'entre elles une preuve de votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *La suite $(x_n)$ est croissante.*

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\exists R_1, R_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ R_1 \leqslant x_n \leqslant R_2$

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists R \in \mathbb{R},\ x_n \leqslant R$

(a) Rappelons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n,\ x_n \leqslant x_{n+1}$. Or

$$\begin{aligned}
x_n \leqslant x_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{5^{n+3}}{(n+1)!} \leqslant \frac{5^{n+4}}{(n+2)!} && \text{(en utilisant la définition de la suite)}\\
&\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant \frac{5}{n+2} && \text{(simplification par } \tfrac{5^{n+3}}{(n+1)!} > 0\text{)}\\
&\Leftrightarrow \quad n \leqslant 3
\end{aligned}$$

On n'a donc $x_n \leqslant x_{n+1}$ que pour $n \leqslant 3$ et non pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prenons $R_1 = 0$ et $R_2 = \frac{5^7}{5!} = \frac{5^6}{4!}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a bien que $x_n \geqslant 0$ car $x_n$ est le quotient de deux termes positifs. Par ailleurs, en détaillant le numérateur et le dénominateur, on a

$$\begin{aligned}
x_n &= 5\cdot 5\cdot \frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{5}\cdots\frac{5}{n}\cdot\frac{5}{n+1}\\
&\leqslant 5\cdot 5\cdot \frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5^6}{4!}
\end{aligned}$$

où l'inégalité résulte du fait que $\frac{5}{k} \leqslant 1$ pour $k \geqslant 5$.

(c) Cette propriété est toujours vraie quelle que soit la suite $(x_n)$. En effet, étant donné un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, on peut prendre $R = x_n \in \mathbb{R}$ qui vérifie bien entendu $x_n \leqslant R$.

REMARQUE : On peut aussi dire que, pour chaque $n$, on prend $R = R_2$ où $R_2$ est donné par le point précédent. En effet, comme ce $R_2$ satisfait $\forall m,\ x_m \leqslant R_2$, c'est valable en particulier pour $m = n$ (comprendre l'influence de l'ordre des quantificateurs). La phrase $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists R \in \mathbb{R},\ x_n \leqslant R$ dit que $R$ *peut* dépendre de $n$, tant mieux s'il est possible de trouver un $R$ qui n'en dépend pas !