Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /5

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est ouvert ».

- Définissez « $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ est une fonction continue ».

- Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ une fonction continue. Montrez, à partir des définitions ci-dessus, que si O est un ouvert de $\mathbb{R}^M$, alors $f^{-1}(O) := \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \in O\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

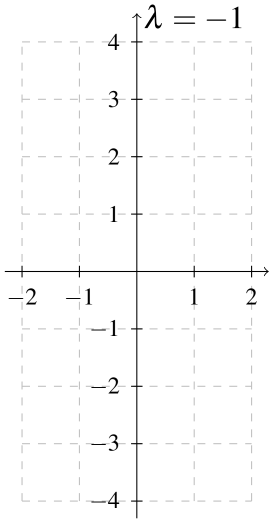
Question 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

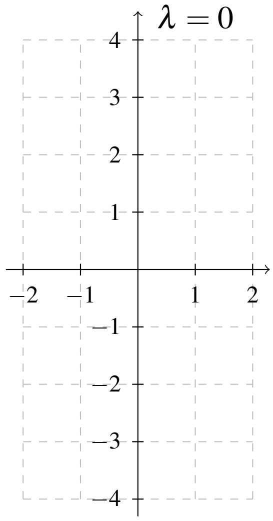
/10

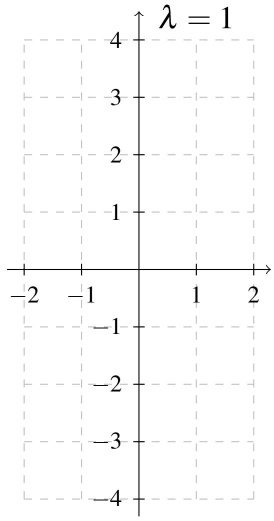
$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant \lambda \\ |x|x & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Esquissez la fonction f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.







(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$.

Question 2 (suite).

(c) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ, étudiez la dérivabilité de f_λ sur $\mathbb{R}$. Il vous est donc demandé de préciser en quel(s) point(s) f_λ est dérivable et en quel(s) points(s) elle ne l'est pas.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 3. On considère[1] une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que /3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) + \mathrm{e}^{x^2 \cdot f(x)} - \sin f(x) - 1 = 0$$

Déduisez-en $f(0)$ et $\partial_x f(0)$.

[1]On ne demande donc *pas* de prouver qu'une telle fonction f existe.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π, alors /4

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geqslant n,\ x_{n_0} > 0.$$

Question 5. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. /4

- Définissez « A est borné » pour la norme $\|\cdot\|$.
- Montrez que la définition que vous venez de donner est équivalente à

$$\exists \rho > 0,\ \forall x \in A,\ A \subseteq B_{\|\cdot\|}[x,\rho] \tag{1}$$

Question 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite bornée. Montrez $\exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant x_n + \delta$. /3

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/8

Question 7. Pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$d(x,A) := \inf\big\{|x-y| : y \in A\big\}.$$

(a) Calculez $d(0,]1,2[)$ et $d(1,]1,2[)$.
INDICATION : Écrivez d'abord explicitement $\big\{|x-y| : y \in]1,2[\big\}$ pour les deux x donnés.

(b) Montrez que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, si $d(x,]1,2[) = 0$, alors $x \in [1,2]$. Détaillez votre raisonnement.

(c) Montrez que, si $A \neq \varnothing$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $d(x,A) \in \mathbb{R}$.

(d) Montrez que, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $d(x,A) = 0$, alors $x \in \operatorname{adh} A$.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 8. Calculez les limites suivantes si elles existent. Justifiez les différentes étapes de vos calculs. /6

- $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y}{|x-1|+|y|}$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/6

Question 9. Calculez le développement de Taylor à l'ordre 3 en 0, avec reste exprimé en terme de o, de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x \cdot \mathrm{e}^{-3x}}{1 + \operatorname{sh} x}$$

RAPPEL : $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 10. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle linéaire suivante :

/6

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \cos(4t) + t\,\mathrm{e}^{2t}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 10 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 11. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto \Big((1+u)\cos\sqrt{uv^2},\ \mathrm{e}^{\pi u^2 \sqrt{v^3}}\Big)$$

au point $(\pi^2, 1)$.

$/5$

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /4

- Définissez « f est un petit o de x^n lorsque $x \to 0$ ».

- Montrez que $o(x^5) + o(x^2) = o(x^2)$.

- Est-il vrai que $o(x^5) + o(x^2) = o(x^5)$? Justifiez.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 2. Énoncez le théorème de Rolle et donnez en une interprétation graphique. Il est *impératif* de faire le lien entre l'énoncé et le graphique. /3

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée nulle en tout point de $\mathbb{R}$. Montrez[1] que f est constante sur $\mathbb{R}$. Indiquez les définitions et les résultats que vous utilisez. /3

[1] Uniquement invoquer le résultat du cours qui affirme le fait à prouver est évidemment considéré comme nul.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 4. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$, avec reste, de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - 2x^2 + 5x^3 + 8x^4$. Donnez votre réponse en complétant la phrase suivante : /4

$\forall x \in \mathbb{R}$, ____________ (quantificateurs), $f(x) =$ ________________________

Question 5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π, alors /4

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geqslant n,\ x_{n_0} > 0.$$

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 6. /10

(a) Définissez « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en a ».

(b) Définissez « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en a ».

(c) Utilisez la définition donnée en (a) pour montrer en quel(s) point(s) la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x + 2|$ est continue et en quel(s) point(s) elle ne l'est pas.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 6 (suite).

(d) Utilisez la définition donnée en (b) pour montrer en quel(s) point(s) la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x+2|$ est dérivable et en quel(s) point(s) elle ne l'est pas.

(e) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x+2|$ appartient-elle à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (resp. à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{-2\};\mathbb{R})$) ? Justifiez vos réponses en détail.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

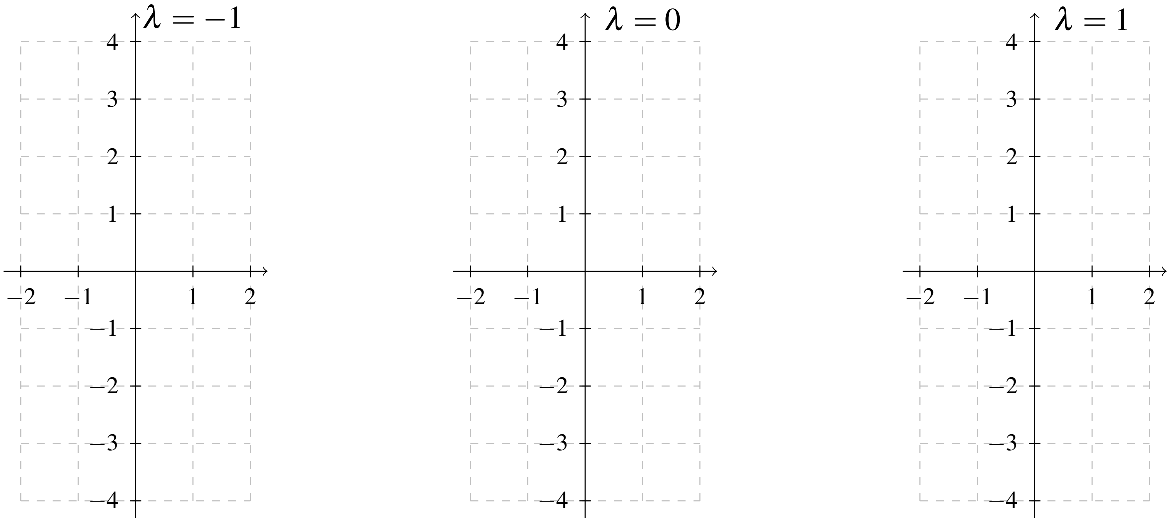
/10

Question 7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leqslant \lambda \\ |x|x & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Esquissez la fonction f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.



(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 7 (suite).

(c) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ, étudiez la dérivabilité de f_λ sur $\mathbb{R}$. Il vous est donc demandé de préciser en quel(s) point(s) f_λ est dérivable et en quel(s) points(s) elle ne l'est pas.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. /6

(a) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ avec $a < b$ deux nombres réels. Supposons que $\forall x \in\ ]a,b[,\ \partial f(x) \leqslant \partial g(x)$. Montrez que

- si $f(a) = g(a)$, alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)$;
- si $f(b) = g(b)$, alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant g(x)$.

(b) Déduisez du point précédent que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/6

Question 9. Calculez le développement de Taylor à l'ordre 3 en 0, avec reste exprimé en terme de o, de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x \cdot \mathrm{e}^{-3x}}{1 + \operatorname{sh} x}$$

RAPPEL : $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 10. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle linéaire suivante : /6

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \cos(4t) + t\,\mathrm{e}^{2t}$$

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 10 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 11. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto \Big((1+u)\cos\sqrt{uv^2},\ \mathrm{e}^{\pi u^2 \sqrt{v^3}}\Big)$$

au point $(\pi^2, 1)$.

/5