Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007)

Correction

Question 1.

- *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Définissez « A est ouvert ».*

$$\forall \xi \in A,\ \exists r > 0,\ B_{\|\cdot\|}(\xi, r) \subseteq A$$

- *Définissez « $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ est une fonction continue ».*

$$\forall a \in \operatorname{Dom} f,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|' < \varepsilon$$

où $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes sur $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^M$ respectivement.

- *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ une fonction continue. Montrez, à partir des définitions ci-dessus, que si O est un ouvert de $\mathbb{R}^M$, alors $f^{-1}(O) := \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \in O\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^M$. Il faut montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. En vertu de la première définition, cela revient à montrer que si on prend un $\xi \in f^{-1}(O)$ arbitraire, alors on peut trouver un $r > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|}(\xi, r) \subseteq f^{-1}(O)$. Soit un tel ξ. Comme $f(\xi) \in O$ et que O est ouvert, il existe un $r' > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|'}\big(f(\xi), r'\big) \subseteq O$. En utilisant la définition de continuité de f avec $a = \xi$ et $\varepsilon = r'$, on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, \quad \|x - \xi\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(\xi)\|' < r' \tag{1}$$

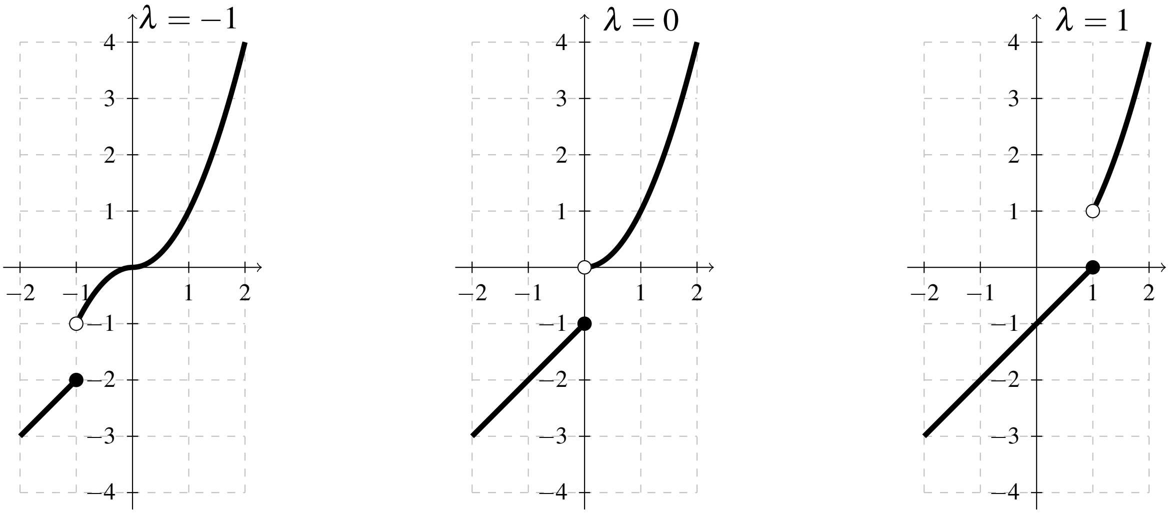
Prenons $r = \delta$ et prouvons que $B_{\|\cdot\|}(\xi, r) \subseteq f^{-1}(O)$. Soit $x \in B_{\|\cdot\|}(\xi, r)$. On a $\|x - \xi\| < r = \delta$ et donc, au vu de (1), $\|f(x) - f(\xi)\|' < r'$ i.e. $f(x) \in B_{\|\cdot\|'}\big(f(\xi), r'\big) \subseteq O$. Donc $f(x) \in O$ i.e. $x \in f^{-1}(O)$.

Question 2. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leqslant \lambda \\ |x|x & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Esquissez la fonction f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.*



(b) *Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$.*

Nous allons montrer que f_λ est continue si et seulement si $\lambda = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Pour commencer, remarquons que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\} =]-\infty, \lambda[\cup]\lambda, +\infty[$. En effet, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ et $x_n \to a$, on a

- si $a \in]-\infty, \lambda[$ alors, comme $]-\infty, \lambda[$ est ouvert, $x_n \in]-\infty, \lambda[$ pour n assez grand. Mais, sur $]-\infty, \lambda[$, $f(x)$ vaut $x - 1$ et donc $f(x_n) = x_n - 1 \to a - 1 = f(a)$ — puisque $x \mapsto x - 1$ est continue ;
- on conclut de manière similaire si $a \in]\lambda, +\infty[$.

Reste donc à examiner $x = \lambda$. Rappelons que f est continue en λ *si et seulement si*

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} f(x) = f(\lambda) = \lim_{x \xrightarrow{>} \lambda} f(x)$$

La première égalité est toujours vraie car, si $x \leqslant \lambda$, $f(x) = x - 1$ et donc, comme cette fonction est continue $\lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} x - 1 = \lambda - 1 = f(\lambda)$. Comme, pour $x > \lambda$, $f(x) = |x|x$, la seconde inégalité se réécrit :

$$\lambda - 1 = f(\lambda) = \lim_{x \xrightarrow{>} \lambda} |x|x = |\lambda|\lambda \tag{2}$$

f_λ sera donc continue si et seulement si (2) est vérifiée. Distinguons deux cas :

- si $\lambda \geqslant 0$, (2) devient $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ qui ne possède pas de solutions réelles car son discriminant $\Delta = -3 < 0$;
- si $\lambda < 0$, (2) devient $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ qui a pour solutions $\lambda = (-1+\sqrt{5})/2$ et $\lambda = (-1-\sqrt{5})/2$, la première devant être rejetée car on travaille sous l'hypothèse $\lambda < 0$.

On a donc établit que f_λ est continue si et seulement si $\lambda = (-1-\sqrt{5})/2$.

(c) *En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ, étudiez la dérivabilité de f_λ sur $\mathbb{R}$. Il vous est donc demandé de préciser en quel(s) point(s) f_λ est dérivable et en quel(s) points(s) elle ne l'est pas.*

Comme pour la continuité, commençons par remarquer que f_λ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda, 0\}$. En effet, si $a \in]-\infty, \lambda[$, alors il existe un voisinage V de a tel que $V \subseteq]-\infty, \lambda[$ (car $]-\infty, \lambda[$ est ouvert). Comme, sur V, $f_\lambda(x) = x - 1$ qui est une fonction dérivable,

$$\partial f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \partial_x (x-1)\restriction_{x=a} = 1$$

Un raisonnement similaire montre que f_λ est dérivable en tout $a \in]\lambda, 0[$ et tout $a \in]0, +\infty[$ — et que sa dérivée vaut respectivement $\partial_x(-x^2)\restriction_{x=a} = -2a$ et $\partial_x(x^2)\restriction_{x=a} = 2a$.

Il reste à traiter les cas $x = 0$ et $x = a$. Établissons que $\partial f(0) = 0$. En effet,

$$\partial f(0) = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{|x|x}{x} = \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} |x| = 0$$

Finalement, prouvons que $\partial f(\lambda)$ n'existe pas. Pour cela nous allons calculer les limites à droite et à gauche du quotient différentiel et voir qu'elles sont différentes :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda} &= \lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{x-1-\lambda+1}{x-\lambda} && (\text{car } f(x) = x-1 \text{ si } x \leqslant \lambda.) \\
&= 1 \\
\lim_{x \xrightarrow{>} \lambda} \frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda} &= \lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{|x|x-f(\lambda)}{x-\lambda} && (\text{car } f(x) = |x|x \text{ si } x > \lambda) \\
&= \lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{|x|x-|\lambda|\lambda}{x-\lambda} && (\text{car } f(\lambda) = \lambda - 1 = |\lambda|\lambda \text{ grâce à } (2)) \\
&= \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} \lambda \\ x \in]-\infty,0[}} \frac{|x|x-|\lambda|\lambda}{x-\lambda} && (\text{restriction à un voisinage de } \lambda) \\
&= \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} \lambda \\ x \in]-\infty,0[}} \frac{-x^2+\lambda^2}{x-\lambda} \\
&= -2\lambda \neq 1 && (\text{car } \lambda = -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \neq -\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

Question 3. *On considère*[1] *une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) + \mathrm{e}^{x^2 \cdot f(x)} - \sin f(x) - 1 = 0 \tag{3}$$

Déduisez-en $f(0)$ *et* $\partial_x f(0)$.

Remplaçons x par 0 dans (3). On a $2f(0) + \mathrm{e}^0 - \sin f(0) - 1 = 0$ ou encore

$$2f(0) = \sin f(0)$$

Or la seule[2] solution de $2y = \sin y$ est $y = 0$, donc $f(0) = 0$.

Puisque (3) dit que la fonction $x \mapsto 2f(x) + \mathrm{e}^{x^2 \cdot f(x)} - \sin f(x) - 1$ est identiquement nulle, il en va de même de sa dérivée. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_x \bigl(2f(x) + \mathrm{e}^{x^2 \cdot f(x)} - \sin f(x) - 1\bigr) = 0$$

ou encore, après calculs,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\partial f(x) + \mathrm{e}^{x^2 f(x)} \bigl(2x f(x) + x^2 \partial f(x)\bigr) - \cos f(x) \partial f(x) = 0$$

En particulier, pour $x = 0$, cela donne $2\partial f(0) - \cos f(0) \partial f(0) = 0$, c'est-à-dire $\partial f(0) = 0$.

REMARQUE : En fait la seule fonction f qui vérifie (3) est la fonction identiquement nulle. Posons $g_x(y) := 2y + \mathrm{e}^{x^2 y} - \sin y - 1$. Clairement $g_x(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus $\partial_y g_x(y) = 2 + \mathrm{e}^{x^2 y} x^2 -$

[1] On ne demande donc *pas* de prouver qu'une telle fonction f existe.

[2] Il est facile de voir que $y = 0$ est solution de $2y = \sin y$. Par ailleurs, comme $y \mapsto 2y - \sin y$ est strictement croissante — car sa dérivée est partout > 0 — c'est la seule solution.

$\cos y \geqslant 1 + e^{x^2 y} x^2 > 0$. Par conséquent, g_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que $y = 0$ est la seule racine de g_x (pouvez-vous faire les détails ?). En résumé

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g_x(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Comme (3) s'écrit $g_x(f(x)) = 0$, on en déduit que $f(x) = 0$ quel que soit x.

Question 4. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geqslant n,\ x_{n_0} > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous devons trouver un $n_0 \geqslant n$ tel que $x_{n_0} > 0$. En utilisant la définition de $x_n \to \pi$ avec $\varepsilon = \pi/2$, on trouve qu'il existe un $m_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall m \geqslant m_0, \quad |x_m - \pi| \leqslant \pi/2$$

Prenons $n_0 := \max\{n, m_0\}$. Comme $n_0 \geqslant m_0$, on a que $|x_{n_0} - \pi| \leqslant \pi/2$ i.e. $-\pi/2 \leqslant x_{n_0} - \pi \leqslant \pi/2$ i.e. $\pi/2 \leqslant x_{n_0} \leqslant 3\pi/2$. En particulier $x_{n_0} > 0$.

Question 5. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$.*

- *Définissez « A est borné » pour la norme $\|\cdot\|$.*

$$\exists r \geqslant 0,\ \forall x \in A,\ \|x\| \leqslant r \tag{4}$$

- *Montrez que la définition que vous venez de donner est équivalente à*

$$\exists \rho > 0,\ \forall x \in A,\ A \subseteq B_{\|\cdot\|}[x, \rho] \tag{5}$$

(4) $\Rightarrow$ (5) Prenons $\rho = 2r$ où r est donné par (4). Soit $x \in A$. Montrons que $A \subseteq B_{\|\cdot\|}[x, \rho]$. Soit $y \in A$. Par (4), on sait que $\|x\| \leqslant r$ et $\|y\| \leqslant r$. Dès lors $\|y - x\| \leqslant \|y\| + \|-x\| = \|y\| + \|x\| \leqslant 2r = \rho$.

(5) $\Rightarrow$ (4) Si $A = \varnothing$, (4) est vrai et il n'y a rien à faire. Sinon, choisissons $x_0 \in A$ et prenons $r = \|x_0\| + \rho$ où ρ est donné par (5). Soit $x \in A$. Montrons que $\|x\| \leqslant r$. Par (5), on sait (en l'utilisant avec $x = x_0$) que $A \subseteq B_{\|\cdot\|}[x_0, \rho]$. Puisque $x \in A$, ceci implique que $x \in B_{\|\cdot\|}[x_0, \rho]$ i.e. $\|x - x_0\| \leqslant \rho$. Dès lors, $\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0\| \leqslant \rho + \|x_0\| = r$.

Question 6. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite bornée. Montrez $\exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant x_n + \delta$.*

Prenons $\delta := 2r + 1 > 0$ où r est donné par la définition de borné : $\exists r \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant r$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x_n \geqslant 0$, alors $|x_n| \leqslant x_n + \delta$ se réduit à $0 \leqslant \delta$ qui est vrai. Si $x_n < 0$, $|x_n| \leqslant x_n + \delta$ revient à $2|x_n| = -2x_n \leqslant \delta = 2r + 1$ qui est vrai car $|x_n| \leqslant r \leqslant r + \frac{1}{2}$ par hypothèse. Dans les deux cas, on a bien $|x_n| \leqslant x_n + \delta$.

Question 7. *Pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit*

$$d(x,A) := \inf\{|x-y| : y \in A\}.$$

(a) *Calculez $d(0,]1,2[)$ et $d(1,]1,2[)$.*

Pour $x=0$, $\{|x-y| : y \in A\}$ devient $\{|y| : y \in]1,2[\}$. Comme tous les $y \in]1,2[$ sont $\geqslant 0$, $|y| = y$ et dès lors $\{|y| : y \in]1,2[\} = \{y : y \in]1,2[\} =]1,2[$. Ainsi $d(0,]1,2[) = \inf]1,2[= 1$ (où la dernière égalité résulte du fait que 1 est plus petit que tout élément de $]1,2[$ et du fait que $1+1/n \to 1$ et $1+1/n \in]1,2[$ pour $n \geqslant 2$).

Pour $x=1$, $\{|x-y| : y \in A\} = \{|1-y| : y \in]1,2[\} = \{|z| : 1-z \in]1,2[\}$ (en posant $z = 1-y$). Or $1 < 1-z < 2$ est équivalent à $0 < -z < 1$ ou encore $0 > z > -1$. Donc $d(1,]1,2[) = \inf\{|z| : z \in]-1,0[\} = \inf\{-z : z \in]-1,0[\} = \inf]0,1[= 0$.

(b) *Montrez que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, si $d(x,]1,2[) = 0$, alors $x \in [1,2]$. Détaillez votre raisonnement.*

Si $\inf\{|x-y| : y \in]1,2[\} = 0$, ceci implique qu'il existe une suite de l'ensemble qui converge vers 0, c'est-à-dire une suite $(y_n) \subseteq]1,2[$ telle que $|x-y_n| \to 0$ i.e. $y_n \to x$. Comme $1 < y_n < 2$ pour tout n, on obtient en passant à la limite $n \to \infty$ que $1 \leqslant x \leqslant 2$ comme désiré.

(c) *Montrez que, si $A \neq \varnothing$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $d(x,A) \in \mathbb{R}$.*

Si $A \neq \varnothing$, $\{|x-y| : y \in A\} \neq \varnothing$ et donc $d(x,A) \neq +\infty$. Par ailleurs, $\{|x-y| : y \in A\}$ est borné inférieurement par 0 et donc, $d(x,A) \geqslant 0 > -\infty$. (On a vu au cours que l'infimum d'un ensemble non-vide et borné inférieurement est réel.)

(d) *Montrez que, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $d(x,A) = 0$, alors $x \in \operatorname{adh} A$.*

Comme en (b), on a que si $d(x,A) = 0$, alors il existe une suite $(y_n) \subseteq A$ telle que $y_n \to x$. Ceci est précisément la définition de $x \in \operatorname{adh} A$.

Question 8. *Calculez les limites suivantes si elles existent. Justifiez les différentes étapes de vos calculs.*

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y}{|x-1|+|y|}$

  On va montrer que cette limite vaut 0. En effet, $|x-1| \leqslant |x-1|+|y|$ et $|y| \leqslant |x-1|+|y|$. Dès lors
  $$\left|\frac{(x-1)y}{|x-1|+|y|}\right| = \frac{|x-1|\,|y|}{|x-1|+|y|} \leqslant |x-1|+|y| = |(x,y)-(1,0)|_\infty$$
  Comme cette dernière quantité tends vers 0 par définition de $(x,y) \to (1,0)$, la convergence dominée implique que $\left|\frac{(x-1)y}{|x-1|+|y|}\right| \to 0$.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

  Approchons $(0,0)$ par le chemin $y=0$, $x\to 0$. On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

  Choisissons maintenant le chemin $y = x^2+x$, $x\to 0$ (qui passe bien par $(0,0)$). On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2+x}} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(x^2+x)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1+(x+1)^2 = 2$$

  Comme les limites sur deux chemins sont différentes, la limite initiale n'existe pas.

Question 9. *Calculez le développement de Taylor à l'ordre* 3 *en* 0*, avec reste exprimé en terme de* o*, de la fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x\cdot \mathrm{e}^{-3x}}{1+\operatorname{sh} x}$$

On a vu au cours que $\mathrm{e}^y = 1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3+\mathrm{o}(y^3)$ lorsque $y\to 0$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-3x} &= 1-3x+\tfrac{9}{2}x^2-\tfrac{9}{2}x^3+\mathrm{o}(-27x^3) \\
x\mathrm{e}^{-3x} &= x-3x^2+\tfrac{9}{2}x^3+\mathrm{o}(x^3) && \text{(car } -\tfrac{9}{2}x^4+x\,\mathrm{o}(x^3)=\mathrm{o}(x^3)) \\
\operatorname{sh} x &= \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\ \ 1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -1+x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3-\mathrm{o}(-x^3)\big) \\
&= x+\tfrac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\frac{1}{2}\big(\mathrm{o}(x^3)-\mathrm{o}(x^3)\big)=\mathrm{o}(x^3)$. On a aussi vu au cours que

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\mathrm{o}(z^3), \quad z\to 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\operatorname{sh} x} &= 1-\big(x+\tfrac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)+\big(x+\tfrac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)^2 \\
&\qquad -\big(x+\tfrac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)^3-\mathrm{o}\Big(\big(x+\tfrac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)^3\Big) \\
&= 1-x-\tfrac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)+x^2+\mathrm{o}(x^3)-x^3+\mathrm{o}(x^3)+\mathrm{o}(x^3) \\
&= 1-x+x^2-\tfrac{7}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

où, dans les développements, on a utilisé le fait que $x^\ell \,\mathrm{o}(x^k) = \mathrm{o}(x^3)$ si $\ell + k \geqslant 3$ pour simplifier les expressions. Finalement, on obtient donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \big(x - 3x^2 + \tfrac{9}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\big)\big(1 - x + x^2 - \tfrac{7}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\big)\\
&= x - 3x^2 + \tfrac{9}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\\
&\qquad - x^2 \ + 3x^3 + \mathrm{o}(x^3)\\
&\qquad\qquad + x^3 \ + \mathrm{o}(x^3)\\
&\qquad\qquad\qquad + \mathrm{o}(x^3)\\
&= x - 4x^2 + \tfrac{17}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

Question 10. *Donnez toutes les solutions* réelles *de l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \cos(4t) + t\,\mathrm{e}^{2t} \tag{6}$$

Commençons par trouver toutes les solutions réelles de l'équation homogène

$$\partial_t^2 u + 16u = 0$$

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 16$. Ses racines sont $\lambda = -4\boldsymbol{i}$ et $\lambda = 4\boldsymbol{i}$. Par conséquent, les solutions complexes sont

$$u(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-4it} + \beta\,\mathrm{e}^{4it}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Pour avoir les solutions réelles, on prend la partie réelle des solutions complexes. Après calculs, on obtient que les solutions réelles sont

$$u(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t), \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Trouvons maintenant une solution particulière pour $\partial_t^2 u + 16u = \cos(4t)$. Comme les coefficients de cette EDO sont réels, une telle solution particulière peut s'obtenir comme la partie réelle d'une solution particulière de

$$\partial_t^2 u + 16u = \mathrm{e}^{4it} \tag{8}$$

Comme $4\boldsymbol{i}$ est racine du polynôme caractéristique de l'équation homogène, on a vu au cours qu'il existe une solution particulière de la forme

$$u_1(t) = t\gamma\mathrm{e}^{4it} \qquad \text{où } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Pour trouver la valeur de γ qui convient, remplaçons u par u_1 dans (8) :

$$8\boldsymbol{i}\gamma\mathrm{e}^{4it} - 16\gamma t\,\mathrm{e}^{4it} + 16t\gamma\mathrm{e}^{4it} = \mathrm{e}^{4it}$$

Pour que cette équation soit vérifiée, il suffit que $8\boldsymbol{i}\gamma = 1$ i.e., $\gamma = -\boldsymbol{i}/8$. Par conséquent, une solution particulière *réelle* est donnée par

$$\Re\big(-\tfrac{\boldsymbol{i}}{8}t\,\mathrm{e}^{4it}\big) = \tfrac{1}{8}t\sin(4t) \tag{9}$$

Trouvons une solution particulière de $\partial_t^2 u + 16u = t\,\mathrm{e}^{2t}$. Comme 2 n'est pas racine du polynôme caractéristique, le cours nous dit qu'il existe une solution particulière de la forme $u_2(t) = (\delta t +$

$\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2t}$ avec $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$. En remplaçant u par u_2 dans l'équation, on trouve que $\delta = 1/20$ et $\varepsilon = -1/100$. Par conséquent, une solution particulière *réelle* est

$$\tfrac{1}{20}\big(t - \tfrac{1}{5}\big)\,\mathrm{e}^{2t} \tag{10}$$

Le principe de superposition et les solutions (7), (9) et (10) impliquent que *toutes* les solutions réelles de (6) sont données par

$$u(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t) + \tfrac{1}{8}t\sin(4t) + \tfrac{1}{20}\big(t - \tfrac{1}{5}\big)\,\mathrm{e}^{2t}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Question 11. *Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto \Big((1+u)\cos\sqrt{uv^2},\ \mathrm{e}^{\pi u^2\sqrt{v^3}}\Big)$$

au point $(\pi^2, 1)$.

Rappelons que l'application linéaire dérivée totale $\partial f(\pi^2,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s'exprime en fonction des dérivées partielles comme suit :

$$\partial f(\pi^2,1)(p,q) = \partial_u f(\pi^2,1)p + \partial_v f(\pi^2,1)q$$

Les dérivées partielles valent[3] :

$$\begin{aligned}
\partial_u f(u,v) &= \Big(\partial_u\big((1+u)\cos\sqrt{uv^2}\big),\ \partial_u\big(\mathrm{e}^{\pi u^2\sqrt{v^3}}\big)\Big)\\
&= \Big(\cos\sqrt{uv^2} - (1+u)\sin\sqrt{uv^2}\,\frac{|v|}{2\sqrt{u}},\ \mathrm{e}^{\pi u^2\sqrt{v^3}}\,2\pi u\sqrt{v^3}\Big)\\
\partial_v f(u,v) &= \Big(-(1+u)\sin\sqrt{uv^2}\,\sqrt{u}\,\mathrm{sign}(v),\ \mathrm{e}^{\pi u^2 v^{3/2}}\,\tfrac{3}{2}\pi u^2\sqrt{v}\Big)
\end{aligned}$$

En particulier, en $(\pi^2,1)$, on a

$$\partial_u f(\pi^2,1) = \big(-1,\ \mathrm{e}^{\pi^5}\,2\pi^3\big) \qquad \text{et} \qquad \partial_v f(\pi^2,1) = \big(0,\ \mathrm{e}^{\pi^5}\,\tfrac{3}{2}\pi^5\big)$$

et donc

$$\partial f(\pi^2,1)(p,q) = \big(-p,\ \pi^3\,\mathrm{e}^{\pi^5}(2p + \tfrac{3}{2}\pi^2 q)\big)$$

La matrice Jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1(\pi^2,1) & \partial_v f_1(\pi^2,1)\\ \partial_u f_2(\pi^2,1) & \partial_v f_2(\pi^2,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 2\pi^3\,\mathrm{e}^{\pi^5} & \tfrac{3}{2}\pi^5\,\mathrm{e}^{\pi^5}\end{pmatrix}$$

[3]Rappelons que, sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\partial_v|v| = \mathrm{sign}(v) = \begin{cases} -1 & \text{si } v<0\\ 1 & \text{si } v>0\end{cases}$

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2007, info / phys)

Correction

Question 1.

- *Définissez « f est un petit* o *de x^n lorsque $x \to 0$ ».*

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

- *Montrez que* $\mathrm{o}(x^5) + \mathrm{o}(x^2) = \mathrm{o}(x^2)$.

  Cela signifie que si f (resp. g) est un petit o de x^5 (resp. de x^2), alors $f+g$ est un petit o de x^2. Tout d'abord $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = 0$. Ensuite, par les règles de calcul de la limite d'une somme et d'un produit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = 0\cdot 0 + 0 = 0$$

- *Est-il vrai que* $\mathrm{o}(x^5) + \mathrm{o}(x^2) = \mathrm{o}(x^5)$ *? Justifiez.*

  Non. En effet, si on prend x^6 qui est un $\mathrm{o}(x^5)$ est x^3 qui est un $\mathrm{o}(x^2)$, la somme $x^6 + x^3$ n'est pas un petit o de x^5 car

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6+x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} x + \frac{1}{x^2} = +\infty \neq 0$$

Question 2. *Énoncez le théorème de Rolle et donnez en une interprétation graphique. Il est* impératif *de faire le lien entre l'énoncé et le graphique.*

Voir les notes de cours.

Question 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée nulle en tout point de $\mathbb{R}$. Montrez*[1] *que f est constante sur $\mathbb{R}$. Indiquez les définitions et les résultats que vous utilisez.*

Voir les notes de cours.

[1] Uniquement invoquer le résultat du cours qui affirme le fait à prouver est évidemment considéré comme nul.

Question 4. *Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$, avec reste, de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - 2x^2 + 5x^3 + 8x^4$. Donnez votre réponse en complétant la phrase suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{\exists \xi \in [1,x]}_{\text{quantificateurs}},\quad f(x) = \underbrace{12 + 43(x-1) + 61(x-1)^2 + 37(x-1)^3}_{\text{développement de Taylor}} + \underbrace{8(x-1)^4}_{\text{reste}}$$

On applique la formule

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!}\partial_x^i f(1)(x-1)^i + \frac{1}{4!}\partial^4 f(\xi)(x-1)^4$$

pour un certain $\xi \in [1,x]$ (qui peut dépendre de x). On calcule

$$\begin{aligned}
f(1) &= 12 \\
\partial f(1) &= \partial_x(1 - 2x^2 + 5x^3 + 8x^4)\restriction_{x=1} = (-4x + 15x^2 + 32x^3)\restriction_{x=1} = 43 \\
\partial^2 f(1) &= \partial_x(-4x + 15x^2 + 32x^3)\restriction_{x=1} = (-4 + 30x + 96x^2)\restriction_{x=1} = 122 \\
\partial^3 f(1) &= (30 + 192x)\restriction_{x=1} = 222 \\
\partial^4 f(\xi) &= 192
\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = 12 + 43(x-1) + \frac{122}{2}(x-1)^2 + \frac{222}{6}(x-1)^3 + \frac{192}{2\cdot 3\cdot 4}(x-1)^4$$

Après simplifications, on trouve la formule annoncée ci-dessus.

Question 5. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geqslant n,\ x_{n_0} > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous devons trouver un $n_0 \geqslant n$ tel que $x_{n_0} > 0$. En utilisant la définition de $x_n \to \pi$ avec $\varepsilon = \pi/2$, on trouve qu'il existe un $m_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall m \geqslant m_0, \quad |x_m - \pi| \leqslant \pi/2$$

Prenons $n_0 := \max\{n, m_0\}$. Comme $n_0 \geqslant m_0$, on a que $|x_{n_0} - \pi| \leqslant \pi/2$ i.e. $-\pi/2 \leqslant x_{n_0} - \pi \leqslant \pi/2$ i.e. $\pi/2 \leqslant x_{n_0} \leqslant 3\pi/2$. En particulier $x_{n_0} > 0$.

Question 6.

(a) *Définissez « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en a ».*

$$a \in \operatorname{Dom} f \quad \wedge \quad \forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f,\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

(b) *Définissez « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en a ».*

$$a \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe}$$

(c) *Utilisez la définition donnée en (a) pour montrer en quel(s) point(s) la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x+2|$ est continue et en quel(s) point(s) elle ne l'est pas.*

f est continue en tout $a \in \mathbb{R}$. En effet, si $x_n \to a$, alors

$$|f(x_n) - f(a)| = \big| |x_n + 2| - |a+2| \big| \leqslant |x_n + 2 - (a+2)| = |x_n - a| \to 0$$

et on conclut que $f(x_n) \to f(a)$ par convergence dominée.

(d) *Utilisez la définition donnée en (b) pour montrer en quel(s) point(s) la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x+2|$ est dérivable et en quel(s) point(s) elle ne l'est pas.*

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ *excepté* en -2.

Soit $a \in \left]-\infty, -2\right[$. Comme $\left]-\infty, -2\right[$ est ouvert, il existe un voisinage V de a tel que $V \subseteq \left]-\infty, -2\right[$. Sur V, $f(x) = -(x+2)$. Dès lors,

$$\partial f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V}} \frac{-x + a}{x - a} = -1 \tag{1}$$

De manière similaire, si $a \in \left]-2, +\infty\right[$, on peut restreindre la limite à un voisinage V de a inclus à $\left]-2, +\infty\right[$, ce qui donne

$$\partial f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V}} \frac{x - a}{x - a} = 1 \tag{2}$$

Finalement montrons que f n'est pas dérivable en -2 en constatant que la limite du quotient différentiel à gauche et à droite est différente :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{|x+2|}{x+2} \\
&= \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{-(x+2)}{x+2} && \text{(car } |x+2| = -(x+2) \text{ si } x < -2) \\
&= -1 \\
\lim_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \lim_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{|x+2|}{x+2} \\
&= \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{x+2}{x+2} && \text{(car } |x+2| = x+2 \text{ si } x > -2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

(e) *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x+2|$ appartient-elle à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (resp. à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{-2\};\mathbb{R})$) ? Justifiez vos réponses en détail.*

f ne peut appartenir à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable sur tout $\mathbb{R}$ (f n'est pas dérivable en -2 comme prouvé ci-dessus). Par contre $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{-2\};\mathbb{R})$ car la dérivée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ existe (au vu de (1) et (2)) et est la fonction

$$\mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

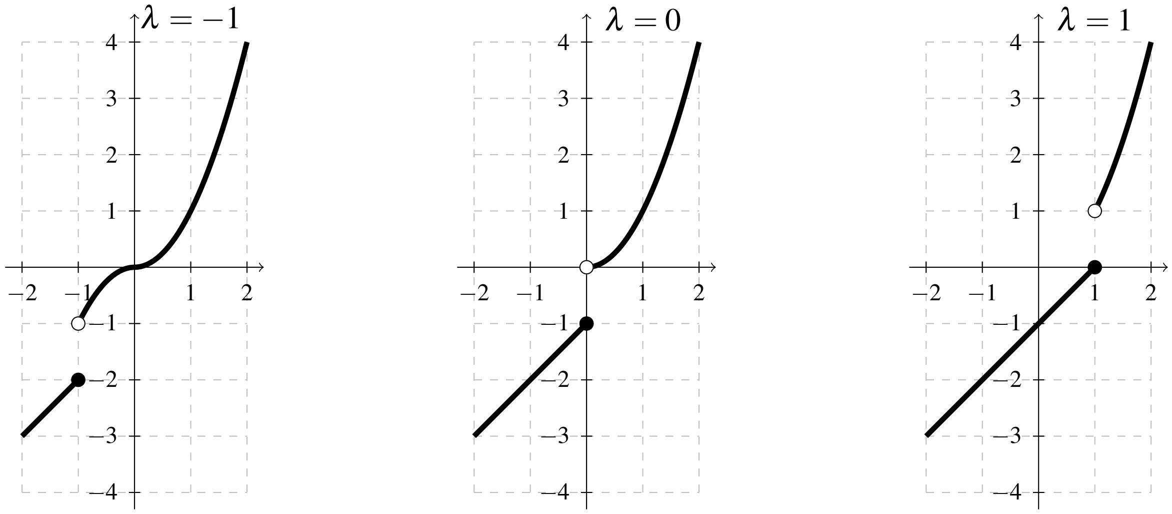
qui est continue (si on veut le montrer explicitement, utiliser un argument similaire à celui répondant à la question 7, point (b)).

Question 7. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x-1 & si\ x \leqslant \lambda \\ |x|x & si\ x > \lambda \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Esquissez la fonction f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.*



(b) *Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$.*

Nous allons montrer que f_λ est continue si et seulement si $\lambda = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Pour commencer, remarquons que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\} =]-\infty,\lambda[\cup]\lambda,+\infty[$. En effet, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ et $x_n \to a$, on a

- si $a \in]-\infty,\lambda[$ alors, comme $]-\infty,\lambda[$ est ouvert, $x_n \in]-\infty,\lambda[$ pour n assez grand. Mais, sur $]-\infty,\lambda[$, $f(x)$ vaut $x-1$ et donc $f(x_n) = x_n - 1 \to a - 1 = f(a)$ — puisque $x \mapsto x-1$ est continue ;

- on conclut de manière similaire si $a \in]\lambda, +\infty[$.

Reste donc à examiner $x = \lambda$. Rappelons que f est continue en λ *si et seulement si*

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} \lambda} f(x) = f(\lambda) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} \lambda} f(x)$$

La première égalité est toujours vraie car, si $x \leqslant \lambda$, $f(x) = x - 1$ et donc, comme cette fonction est continue $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} \lambda} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} \lambda} x - 1 = \lambda - 1 = f(\lambda)$. Comme, pour $x > \lambda$, $f(x) = |x|x$, la seconde inégalité se réécrit :

$$\lambda - 1 = f(\lambda) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} \lambda} |x|x = |\lambda|\lambda \tag{3}$$

f_λ sera donc continue si et seulement si (3) est vérifiée. Distinguons deux cas :

- si $\lambda \geqslant 0$, (3) devient $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ qui ne possède pas de solutions réelles car son discriminant $\Delta = -3 < 0$;
- si $\lambda < 0$, (3) devient $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ qui a pour solutions $\lambda = (-1+\sqrt{5})/2$ et $\lambda = (-1-\sqrt{5})/2$, la première devant être rejetée car on travaille sous l'hypothèse $\lambda < 0$.

On a donc établit que f_λ est continue si et seulement si $\lambda = (-1-\sqrt{5})/2$.

(c) *En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ, étudiez la dérivabilité de f_λ sur $\mathbb{R}$. Il vous est donc demandé de préciser en quel(s) point(s) f_λ est dérivable et en quel(s) points(s) elle ne l'est pas.*

Comme pour la continuité, commençons par remarquer que f_λ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda, 0\}$. En effet, si $a \in]-\infty, \lambda[$, alors il existe un voisinage V de a tel que $V \subseteq]-\infty, \lambda[$ (car $]-\infty, \lambda[$ est ouvert). Comme, sur V, $f_\lambda(x) = x - 1$ qui est une fonction dérivable,

$$\partial f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in V}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \partial_x (x-1)\restriction_{x=a} = 1$$

Un raisonnement similaire montre que f_λ est dérivable en tout $a \in]\lambda, 0[$ et tout $a \in]0, +\infty[$ — et que sa dérivée vaut respectivement $\partial_x(-x^2)\restriction_{x=a} = -2a$ et $\partial_x(x^2)\restriction_{x=a} = 2a$.

Il reste à traiter les cas $x = 0$ et $x = a$. Établissons que $\partial f(0) = 0$. En effet,

$$\partial f(0) = \lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} \frac{|x|x}{x} = \lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} 0} |x| = 0$$

Finalement, prouvons que $\partial f(\lambda)$ n'existe pas. Pour cela nous allons calculer les limites à droite et à gauche du quotient différentiel et voir qu'elles sont différentes :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda} &= \lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{x-1-\lambda+1}{x-\lambda} && (\text{car } f(x) = x-1 \text{ si } x \leqslant \lambda.) \\
&= 1 \\
\lim_{x \xrightarrow{>} \lambda} \frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda} &= \lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{|x|x-f(\lambda)}{x-\lambda} && (\text{car } f(x) = |x|x \text{ si } x > \lambda) \\
&= \lim_{x \xrightarrow{<} \lambda} \frac{|x|x-|\lambda|\lambda}{x-\lambda} && (\text{car } f(\lambda) = \lambda - 1 = |\lambda|\lambda \text{ grâce à (3)}) \\
&= \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} \lambda \\ x \in]-\infty,0[}} \frac{|x|x-|\lambda|\lambda}{x-\lambda} && (\text{restriction à un voisinage de } \lambda) \\
&= \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} \lambda \\ x \in]-\infty,0[}} \frac{-x^2+\lambda^2}{x-\lambda} \\
&= -2\lambda \neq 1 && (\text{car } \lambda = -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \neq -\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

Question 8.

(a) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ avec $a < b$ deux nombres réels. Supposons que $\forall x \in]a,b[,\ \partial f(x) \leqslant \partial g(x)$. Montrez que*

- *si $f(a) = g(a)$, alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)$;*
- *si $f(b) = g(b)$, alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant g(x)$.*

Posons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Comme, par hypothèse, $\partial h(x) = \partial f(x) - \partial g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a,b[$, on sait, d'après un corollaire du théorème de la moyenne, que h est décroissante sur $[a,b]$ c'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b], \quad x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

- Supposons $f(a) = g(a)$ et prenons $x \in [a,b]$. Comme $a \leqslant x$, la décroissance de h implique que $0 = h(a) \geqslant h(x) = f(x) - g(x)$, d'où $0 \geqslant f(x) - g(x)$ comme désiré.
- Supposons maintenant $f(b) = g(b)$ et prenons $x \in [a,b]$. Comme $x \leqslant b$, la décroissance de h implique que $f(x) - g(x) = h(x) \geqslant h(b) = 0$, d'où $f(x) - g(x) \geqslant 0$ comme désiré.

(b) *Déduisez du point précédent que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$. Expliquez votre démarche.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons trois cas.

- Si $x = 0$, alors $e^x = e^0 = 1 = 1 + x$.
- Si $x > 0$, on va utiliser le premier point du résultat précédent sur $[a,b] := [0,x]$ avec $f(x) = 1 + x$ et $g(x) = e^x$. On peut car f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori sur $[0,x]$) et, quel que soit $x \geqslant 0$, $\partial f(x) = 1 \leqslant \partial g(x) = e^x$. La conclusion est que, pour tout $\xi \in [0,x]$, $f(\xi) \leqslant g(\xi)$. En particulier, pour $\xi = x$, on a $1 + x = f(x) \leqslant g(x) = e^x$.

- Si $x<0$, on va utiliser le second point du résultat précédent sur $[a,b]:=[x,0]$ avec $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $g(x)=1+x$. Comme avant, les conditions de différentiabilité et l'inégalité sont satisfaites. Donc, pour tout $\xi\in[x,0]$, $f(\xi)\geqslant g(\xi)$. En particulier, pour $\xi=x$, on a $\mathrm{e}^x=f(x)\geqslant g(x)=1+x$.

Question 9. *Calculez le développement de Taylor à l'ordre* 3 *en* 0*, avec reste exprimé en terme de* o*, de la fonction*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{x\cdot\mathrm{e}^{-3x}}{1+\operatorname{sh}x}$$

On a vu au cours que $\mathrm{e}^y=1+y+\frac12y^2+\frac16y^3+\mathrm{o}(y^3)$ lorsque $y\to0$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-3x}&=1-3x+\tfrac92x^2-\tfrac92x^3+\mathrm{o}(-27x^3)\\
x\,\mathrm{e}^{-3x}&=x-3x^2+\tfrac92x^3+\mathrm{o}(x^3) &&(\text{car }-\tfrac92x^4+x\,\mathrm{o}(x^3)=\mathrm{o}(x^3))\\
\operatorname{sh}x=\tfrac12\big(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\big)&=\tfrac12\big(\quad 1+x+\tfrac12x^2+\tfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)\\
&\qquad\quad -1+x-\tfrac12x^2+\tfrac16x^3-\mathrm{o}(-x^3)\big)\\
&=x+\tfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\frac12\big(\mathrm{o}(x^3)-\mathrm{o}(x^3)\big)=\mathrm{o}(x^3)$. On a aussi vu au cours que

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\mathrm{o}(z^3),\quad z\to0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\operatorname{sh}x}&=1-\big(x+\tfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)+\big(x+\tfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)^2\\
&\qquad-\big(x+\tfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)^3-\mathrm{o}\Big(\big(x+\tfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)^3\Big)\\
&=1-x-\tfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)+x^2+\mathrm{o}(x^3)-x^3+\mathrm{o}(x^3)+\mathrm{o}(x^3)\\
&=1-x+x^2-\tfrac76x^3+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

où, dans les développements, on a utilisé le fait que $x^\ell\,\mathrm{o}(x^k)=\mathrm{o}(x^3)$ si $\ell+k\geqslant3$ pour simplifier les expressions. Finalement, on obtient donc

$$\begin{aligned}
f(x)&=\big(x-3x^2+\tfrac92x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)\big(1-x+x^2-\tfrac76x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)\\
&=x-3x^2+\tfrac92x^3+\mathrm{o}(x^3)\\
&\qquad-x^2\;+3x^3+\mathrm{o}(x^3)\\
&\qquad\qquad+x^3\;+\mathrm{o}(x^3)\\
&\qquad\qquad\qquad+\mathrm{o}(x^3)\\
&=x-4x^2+\tfrac{17}{2}x^3+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

Question 10. *Donnez toutes les solutions* réelles *de l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \cos(4t) + t\,\mathrm{e}^{2t} \tag{4}$$

Commençons par trouver toutes les solutions réelles de l'équation homogène

$$\partial_t^2 u + 16u = 0$$

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 16$. Ses racines sont $\lambda = -4\boldsymbol{i}$ et $\lambda = 4\boldsymbol{i}$. Par conséquent, les solutions complexes sont

$$u(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-4it} + \beta\,\mathrm{e}^{4it}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Pour avoir les solutions réelles, on prend la partie réelle des solutions complexes. Après calculs, on obtient que les solutions réelles sont

$$u(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t), \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Trouvons maintenant une solution particulière pour $\partial_t^2 u + 16u = \cos(4t)$. Comme les coefficients de cette EDO sont réels, une telle solution particulière peut s'obtenir comme la partie réelle d'une solution particulière de

$$\partial_t^2 u + 16u = \mathrm{e}^{4it} \tag{6}$$

Comme $4\boldsymbol{i}$ est racine du polynôme caractéristique de l'équation homogène, on a vu au cours qu'il existe une solution particulière de la forme

$$u_1(t) = t\gamma \mathrm{e}^{4it} \qquad \text{où } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Pour trouver la valeur de γ qui convient, remplaçons u par u_1 dans (6) :

$$8\boldsymbol{i}\gamma \mathrm{e}^{4it} - 16\gamma t\,\mathrm{e}^{4it} + 16t\gamma \mathrm{e}^{4it} = \mathrm{e}^{4it}$$

Pour que cette équation soit vérifiée, il suffit que $8\boldsymbol{i}\gamma = 1$ i.e., $\gamma = -\boldsymbol{i}/8$. Par conséquent, une solution particulière *réelle* est donnée par

$$\Re\left(-\tfrac{\boldsymbol{i}}{8} t\,\mathrm{e}^{4it}\right) = \tfrac{1}{8} t \sin(4t) \tag{7}$$

Trouvons une solution particulière de $\partial_t^2 u + 16u = t\,\mathrm{e}^{2t}$. Comme 2 n'est pas racine du polynôme caractéristique, le cours nous dit qu'il existe une solution particulière de la forme $u_2(t) = (\delta t + \varepsilon)\,\mathrm{e}^{2t}$ avec $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$. En remplaçant u par u_2 dans l'équation, on trouve que $\delta = 1/20$ et $\varepsilon = -1/100$. Par conséquent, une solution particulière *réelle* est

$$\tfrac{1}{20}\left(t - \tfrac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{2t} \tag{8}$$

Le principe de superposition et les solutions (5), (7) et (8) impliquent que *toutes* les solutions réelles de (4) sont données par

$$u(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t) + \tfrac{1}{8} t\sin(4t) + \tfrac{1}{20}\left(t - \tfrac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Question 11. *Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto \Big((1+u)\cos\sqrt{uv^2},\ \mathrm{e}^{\pi u^2\sqrt{v^3}}\Big)$$

au point $(\pi^2, 1)$.

Rappelons que l'application linéaire dérivée totale $\partial f(\pi^2,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s'exprime en fonction des dérivées partielles comme suit :

$$\partial f(\pi^2,1)(p,q) = \partial_u f(\pi^2,1)p + \partial_v f(\pi^2,1)q$$

Les dérivées partielles valent[2] :

$$\begin{aligned}\partial_u f(u,v) &= \Big(\partial_u\big((1+u)\cos\sqrt{uv^2}\big),\ \partial_u\big(\mathrm{e}^{\pi u^2\sqrt{v^3}}\big)\Big)\\ &= \Big(\cos\sqrt{uv^2} - (1+u)\sin\sqrt{uv^2}\,\frac{|v|}{2\sqrt{u}},\ \mathrm{e}^{\pi u^2\sqrt{v^3}}\,2\pi u\sqrt{v^3}\Big)\\ \partial_v f(u,v) &= \Big(-(1+u)\sin\sqrt{uv^2}\,\sqrt{u}\,\mathrm{sign}(v),\ \mathrm{e}^{\pi u^2 v^{3/2}}\,\tfrac{3}{2}\pi u^2\sqrt{v}\Big)\end{aligned}$$

En particulier, en $(\pi^2, 1)$, on a

$$\partial_u f(\pi^2,1) = \big(-1,\ \mathrm{e}^{\pi^5}\,2\pi^3\big) \qquad \text{et} \qquad \partial_v f(\pi^2,1) = \big(0,\ \mathrm{e}^{\pi^5}\,\tfrac{3}{2}\pi^5\big)$$

et donc

$$\partial f(\pi^2,1)(p,q) = \big(-p,\ \pi^3\,\mathrm{e}^{\pi^5}(2p + \tfrac{3}{2}\pi^2 q)\big)$$

La matrice Jacobienne est :

$$\begin{pmatrix}\partial_u f_1(\pi^2,1) & \partial_v f_1(\pi^2,1)\\ \partial_u f_2(\pi^2,1) & \partial_v f_2(\pi^2,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2\pi^3\,\mathrm{e}^{\pi^5} & \tfrac{3}{2}\pi^5\,\mathrm{e}^{\pi^5}\end{pmatrix}$$

[2] Rappelons que, sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\partial_v|v| = \mathrm{sign}(v) = \begin{cases}-1 & \text{si } v < 0\\ 1 & \text{si } v > 0\end{cases}$