Analyse mathématique I

Examen (24 août 2007)

Nom : ....

Prénom : ....

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

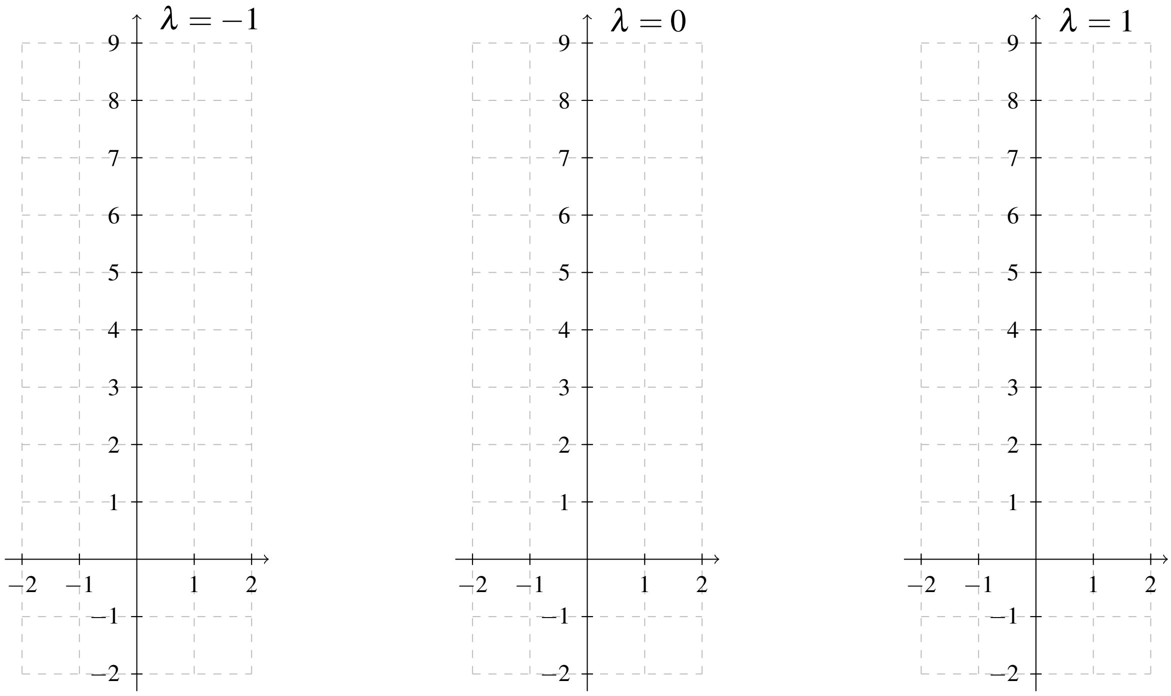
- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /10

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} (x-\lambda)^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 + \lambda & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Esquissez le graphe de la fonction f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.



Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 1 (suite).

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$.

(c) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ, étudiez la dérivabilité de f_λ sur $\mathbb{R}$. Il vous est donc demandé de préciser en quel(s) point(s) f_λ est dérivable et en quel(s) points(s) elle ne l'est pas.

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 2. Montrer que $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est borné si et seulement si

/4

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A,\ \exists R > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| \leqslant R \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/4

Question 3. On considère l'équation

$$e^{-x} = x^{1/3} \tag{2}$$

(a) Montrez que (2) possède au moins une solution.

(b) Prouvez que (2) possède en fait une unique solution.

Veillez à détailler (et justifier !) toutes les étapes de votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. /4

- Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique. Faites explicitement le lien entre votre dessin et l'énoncé.
- Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\partial f(x)| \leqslant 1$. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x|$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Calculez les limites suivantes si elles existent. Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

/6

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3y^2}{2x^5-2y^5}$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x}}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Dites, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse par un court argument ou un contre exemple.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) converge vers π, alors (x_n) est bornée inférieurement par 0.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) est décroissante et bornée inférieurement par 0, alors (x_n) converge vers 0.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) converge vers 0, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n < \pi$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) converge vers π, alors $\exists n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.

Analyse mathématique I

Examen (24 août 2007)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que

$$M := \left\{ x \in [a,b] : f(x) = \max_{\xi \in [a,b]} f(\xi) \right\}$$

est un ensemble compact.

/4

Question 8. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On définit

$$A - B := \{a - b : a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Prouvez, en utilisant la définition de votre choix, que $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$.

/4

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/6

Question 9. Calculez le développement de Taylor à l'ordre 2 en 1, avec reste exprimé en terme de o, de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x-1)^2\, \mathrm{e}^{-5(x-1)}}{1+\operatorname{sh}(x-1)}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 10. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle linéaire suivante : /6

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \sin(2t) + t^2\, \mathrm{e}^{4t}$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 10 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/5

Question 11. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto \Big((1+v)\,\mathrm{e}^{-v\sqrt[3]{u^2}},\ (1-u)^2\sqrt{\mathrm{tg}(uv)}\Big)$$

au point $(\pi/2, \pi/2)$.

Analyse mathématique I

Examen (24 août 2007)

Nom : ______________
Prénom : ______________
Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

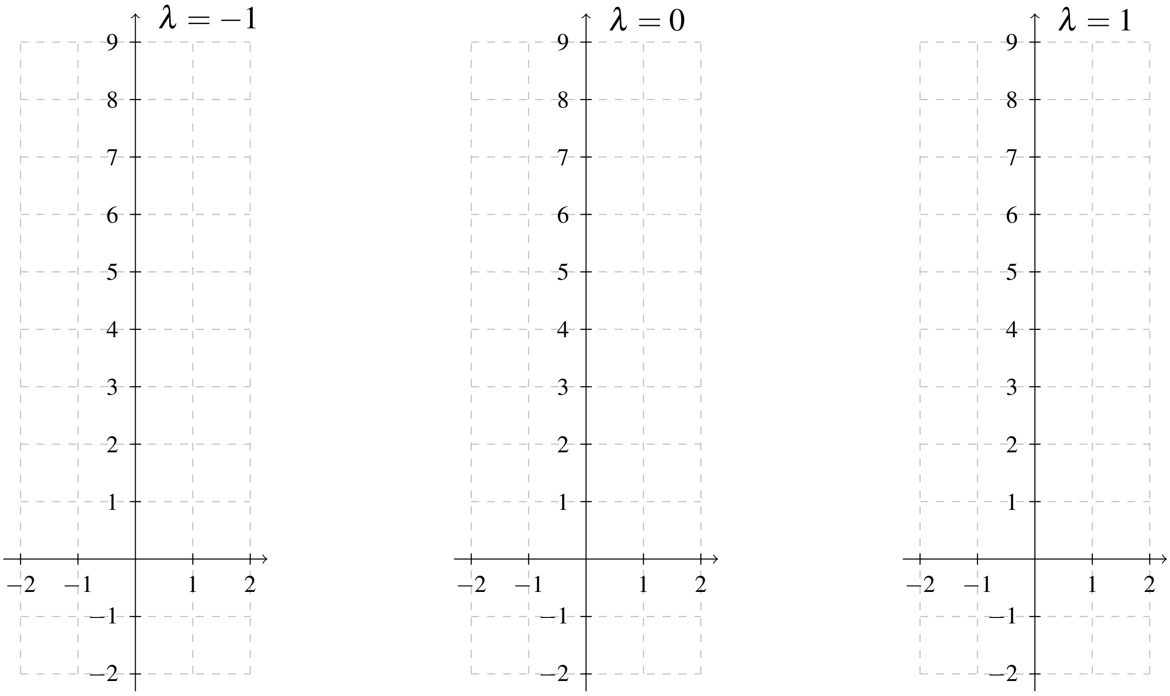
- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /10

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} (x-\lambda)^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 + \lambda & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Esquissez le graphe de la fonction f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.



Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 1 (suite).

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$.

(c) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ, étudiez la dérivabilité de f_λ sur $\mathbb{R}$. Il vous est donc demandé de préciser en quel(s) point(s) f_λ est dérivable et en quel(s) points(s) elle ne l'est pas.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. /7

- Définissez « f est continue en a ».

- Définissez « f est dérivable en a ».

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 2 (suite).

- Peut-on dire que, si f est continue en a, alors f est dérivable en a ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

- Peut-on dire que, si f est dérivable en a, alors f est continue en a ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

- On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{|x|}$. f est-elle continue en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ? Justifiez vos réponses.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

/4

Question 3. On considère l'équation

$$e^{-x} = x^{1/3} \tag{1}$$

(a) Montrez que (1) possède au moins une solution.

(b) Prouvez que (1) possède en fait une unique solution.

Veillez à détailler (et justifier !) toutes les étapes de votre raisonnement.

Analyse mathématique I

Examen (24 août 2007)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Dites, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse par un court argument ou un contre exemple. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) converge vers π, alors (x_n) est bornée inférieurement par 0.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) est décroissante et bornée inférieurement par 0, alors (x_n) converge vers 0.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) converge vers 0, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n < \pi$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si (x_n) converge vers π, alors $\exists n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 5.

/5

- Prouvez qu'un intervalle du type $[a,b]$ est fermé et borné. Veuillez expliciter les définitions que vous utilisez.

- Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ une fonction telle que $\partial f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

- Montrez que $\dfrac{\mathrm{o}(1)}{1+\mathrm{o}(1)} = \mathrm{o}(1)$. Veillez à la précision de vos explications.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 6. /4

- Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique. Faites explicitement le lien entre votre dessin et l'énoncé.
- Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\partial f(x)| \leqslant 1$. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x|$.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 7. Calculez le développement de Taylor à l'ordre 2 en 0, avec reste exprimé en terme de o, de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 \, \mathrm{e}^{-5x}}{1 + \operatorname{sh} x}$$

/6

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 8. Donnez toutes les solutions *réelles* de l'équation différentielle linéaire suivante :

/6

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \sin(2t) + t^2\,\mathrm{e}^{4t}$$

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 8 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 9. Calculez la dérivée totale et la matrice Jacobienne de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto \Big((1+v)\,\mathrm{e}^{-v\sqrt[3]{u^2}},\ (1-u)^2 \sqrt{\operatorname{tg}(uv)} \Big)$$

au point $(\pi/2, \pi/2)$.

$/5$