Analyse mathématique I

Examen (25 janvier 2008)

Nom : ______________
Prénom : ______________
Section : ______

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom, sans section, ou mal remises ne seront pas corrigées et/ou pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. /4

(a) Définissez « (x_n) est décroissante ».

(b) Définissez « (x_n) est bornée inférieurement ».

(c) Définissez « (x_n) converge vers $-\infty$ ».

(d) Montrez, à partir des définitions que vous venez de donner, que, si (x_n) est une suite décroissante *non*-bornée inférieurement, alors $x_n \to -\infty$. Veillez à la qualité de votre rédaction.

Analyse mathématique I

Examen (25 janvier 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez la limite au sens large, si elle existe, de chacune des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définies ci-après. Justifiez vos calculs.

/8

(a) $x_n = \dfrac{4-3^n}{n!}\sin n$

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{1+\sin^2 n}$

(c) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cos(n!) + n^2 + 1}{n^2 - 2}$

(d) $x_n = \left(\dfrac{2n+3}{2\sqrt{n}-1}\right)^3$

Nom :
Prénom :
Section :

/10

Question 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Définissez « $\min A$ existe ».

(b) Définissez « $\inf A$ existe ».

(c) Montrez que si $\min A$ existe alors $\inf A$ existe et $\inf A = \min A$.

(d) À partir des définitions données en (a) et (b), justifiez l'existence ou la non-existence du minimum (resp. de l'infimum) pour chacun des ensembles ci-dessous. Lorsque vous affirmez l'existence du minimum (resp. de l'infimum), veuillez calculer sa valeur. Justifiez vos calculs.

$$A := \left\{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}^{>0}\right\} \qquad B := \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \leqslant 0\right\}$$
$$C := \left\{x^3 - x : x \in \left]-1, 2\right[\right\} \qquad D := -C$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (25 janvier 2008)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. /7

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\sqrt{n}+\pi \to +\infty$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Montrez que la définition que vous avez donnée en (a) est équivalente à

$$\forall \rho' \in [1,+\infty[,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0',\ x_n > \rho' \tag{1}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

/7

(a) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Montrez, à partir de (a), que $\|0\| = 0$.

(c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^3$ définis par $x = (-1, 5, 2)$ et $y = (0, -3, -4)$. Calculez $|x-y|_1$, $|x-y|_2$ et $|x-y|_\infty$.

(d) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Montrez, à partir de (a), que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$$

Nom :
Prénom :
Section :

/8

Question 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = ax_n + b \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

(a) Montrez que, si $a \neq 1$, cette suite est égale à la suite $\left(\frac{-b}{a-1} + \frac{b}{a-1}a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Étudiez la convergence de (x_n) lorsque $a \neq 1$.

(c) Donnez explicitement la suite (x_n) lorsque $a = 1$.

(d) Étudiez la convergence de (x_n) lorsque $a = 1$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 7. Donnez un exemple de suite $(x_n)_{n\geqslant 0} \subseteq \mathbb{R}$ qui converge vers 0 mais qui n'est pas monotone. Prouvez que la suite donnée satisfait les conditions requises. /3

Analyse mathématique I

Examen (25 janvier 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/8

Question 8. Soit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \sqrt{2+\frac{1}{2}t_n^2} \end{cases}$$

Dites, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ (t_n) est bornée.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ (t_n) est strictement croissante.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ (t_n) converge.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ (t_n) converge vers $\sqrt{3}/2$.

Analyse mathématique I

Examen (25 janvier 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la suite définie par

$/5$

$$x_n = \frac{n^{k+1}+n}{n^2(n+\pi)(n+\sqrt{2})^3}$$

où $k \in \mathbb{N}$. Donnez toutes les valeurs de k pour lesquelles la suite converge vers un nombre réel. Pour chacun de ces k, calculez la valeur de la limite.