Analyse mathématique I

Examen

(9 juin 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Écrivez chacune des propriétés suivantes sous forme de formules avec quantificateurs et sans symbole de négation. /5

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ converge vers $a \in \mathbb{R}^N$ au sens de la norme $\|\cdot\|$.

(c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.

(d) $a \in \mathbb{R}$ est le maximum de $A \subseteq \mathbb{R}$.

(e) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2008)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : Mathématique

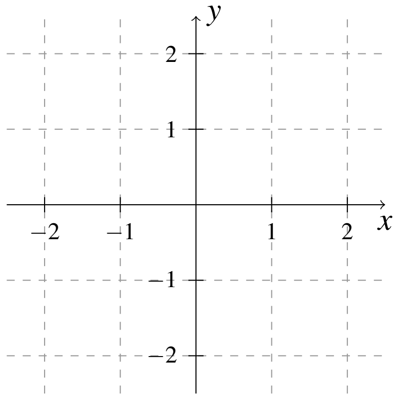
/6

Question 2. Pour chacune des limites suivantes, tracez le domaine de définition de la fonction dont on prend la limite et calculez la valeur de cette limite, si elle existe. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

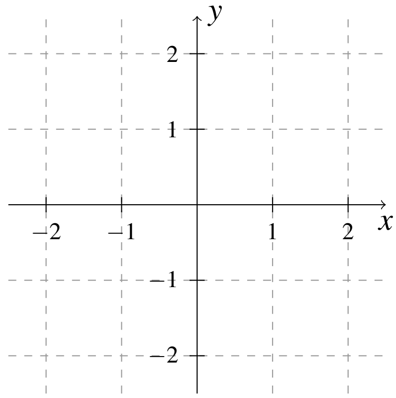
(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x(y+1)^3}{2x^2+(y+1)^2}$

(b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{xy}$

Domaine de (a)



Domaine de (b)



Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 3. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1 + \text{sh}(x)}$$

Déduisez-en la valeur de la limite $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{\sin x}$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \sin(3t) + t\,\mathrm{e}^t$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 5.

/4

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « A est compact » en terme de recouvrements.

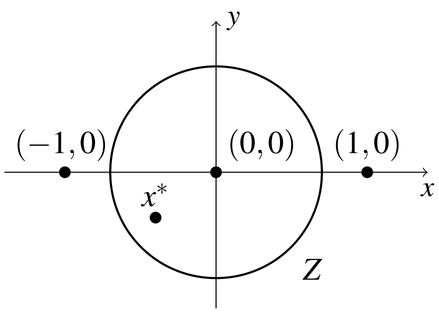
(b) À partir de la définition donnée au point (a), prouvez que l'ensemble $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}\}$ n'est pas compact.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.



Question 6. On considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des racines $Z := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ est représenté sur la figure ci-contre. On sait de plus que $f(0,0) > 0$ et $f(1,0) < 0$. Donnez le signe de $f(-1,0)$ et $f(x^*)$. Justifiez vos réponses par une preuve détaillée en veillant à citer les théorèmes que vous utilisez.

/4

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $a \in \mathbb{R}$. Considérons les propositions suivantes : /4

(a) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon$;

(b) $\forall\varepsilon' \geqslant 0,\ \exists n'_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n'_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon'$.

Ces deux propositions sont-elles équivalentes ? Justifiez la véracité ou la fausseté de chacune des deux implications par une preuve détaillée ou par un contre exemple explicite.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 8. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M : x \mapsto f(x)$, $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^M$.

/6

(a) Définissez « $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ » (c'est cette définition que vous devrez utiliser pour répondre au point (c) ci-après).

(b) Si $V \subseteq \mathbb{R}^M$, définissez « $f^{-1}(V)$ ».

Pour rappel, on dit d'un ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^P$ qu'il est un voisinage de $c \in \mathbb{R}^P$ s'il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^P$ tel que $c \in O \subseteq U$.

(c) Démontrez que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si, pour tout voisinage V de b, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a. La qualité de votre rédaction est importante.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/6

Question 9. On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \leqslant 1\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 - \sin(xy) < 17\}.$$

Pour chacun d'entre-eux, dites s'il s'agit d'un ensemble ouvert, fermé, borné et/ou compact. Veillez à justifier vos affirmations avec suffisament de détails.

Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 10. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On suppose que le développement de Taylor d'ordre 2 de f en $x = \pi$ avec un reste exprimé en terme de petit o est /5

$$3 + 8(x-\pi)^2 + \mathrm{o}\big((x-\pi)^2\big) \tag{1}$$

(a) Calculez $f(\pi)$. Justifiez votre réponse.

(b) Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = \pi$. Justifiez votre réponse.

(c) Parmi les propositions suivantes, cochez celle qui répond à la question : quelle est la position du graphe de f par rapport à la tangente T calculée au point (b) pour des x proches de π ?

- ☐ Le graphe de f est en dessous de T.
- ☐ Le graphe de f est au dessus de T.
- ☐ Le graphe de f est parfois en dessous, parfois au dessus de T.
- ☐ On ne peut rien dire vu les informations disponibles.

Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2008)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

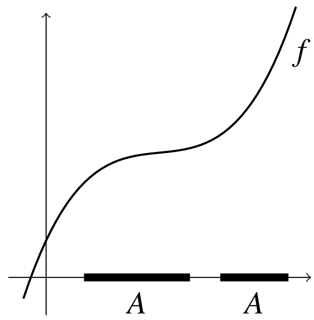
Question 11.

/8

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Définissez $f(A)$.

(b) Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Définissez « b est l'infimum de B » en terme de suites.

(c) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et borné inférieurement et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue. Prouvez que $f(\inf A) = \inf f(A)$.
Remarques : L'ensemble A n'est pas nécessairement un intervalle. Nous vous conseillons de penser à votre stratégie de résolution en vous aidant du graphe ci-contre.



(d) Donnez un exemple qui montre que la propriété énoncée au point (c) n'est pas nécessairement vérifiée si f n'est pas continue.

Analyse mathématique I

Examen

(9 juin 2008)

Nom : ________________

Prénom : ______________

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? /5

$$f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R} \ \underset{\text{(b)}}{\overset{\text{(a)}}{\rightleftarrows}} \ \forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$$

Justifiez vos réponses par une preuve détaillée ou par un contre exemple explicite. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 1 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 2. Écrivez chacune des propriétés suivantes sous forme de formules avec quantificateurs et sans symbole de négation. /4

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.

(c) $a \in \mathbb{R}$ est le maximum de $A \subseteq \mathbb{R}$.

(d) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 3. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\big/ 5$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1 + \mathrm{sh}(x)}$$

Déduisez-en la valeur de la limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{\sin x}$.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 4. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \sin(3t) + t\,\mathrm{e}^t$$

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 4 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 5. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On suppose que le développement de Taylor d'ordre 2 de f en $x = \pi$ avec un reste exprimé en terme de petit o est /5

$$3 + 8(x-\pi)^2 + \mathrm{o}\big((x-\pi)^2\big) \tag{1}$$

(a) Calculez $f(\pi)$. Justifiez votre réponse.

(b) Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = \pi$. Justifiez votre réponse.

(c) Parmi les propositions suivantes, cochez celle qui répond à la question : quelle est la position du graphe de f par rapport à la tangente T calculée au point (b) pour des x proches de π ?

- ☐ Le graphe de f est en dessous de T.
- ☐ Le graphe de f est au dessus de T.
- ☐ Le graphe de f est parfois en dessous, parfois au dessus de T.
- ☐ On ne peut rien dire vu les informations disponibles.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 6. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. /8

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Si $x_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < 0$, alors $1/x_n \to -\infty$.

- Si $f(x) = \mathrm{o}\big((x-1)^7\big)$ lorsque $x \to 1$, alors $f(x) = \mathrm{o}\big((x-1)^4\big)$.

- Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Si A et B sont deux ensembles bornés inférieurement, alors $A \cup B$ est un ensemble borné inférieurement.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ |x| < 1/n$, alors $x = 0$.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 7.

$/7$

(a) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^N$. Définissez en termes de suites « f est continue en a ».

(b) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(c) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$ et $x, y \in \mathbb{R}^N$. Montrez que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$.

(d) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$ et $a \in \mathbb{R}^N$. En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\|\cdot\|$ est continue en a.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 8. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/8

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 7 & \text{si } x \leqslant \lambda \\ 1 + 4x & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

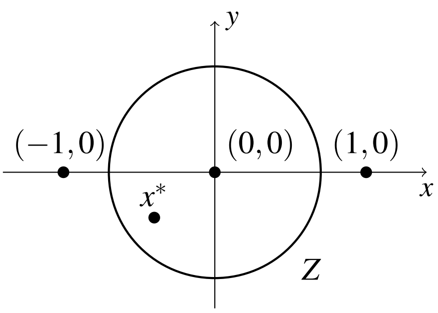
où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez et justifiez votre démarche. Pour la ou les valeurs trouvées, prouvez la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité, calculez, si possible, $\partial_x f(\lambda)$ et $\partial_x f(0)$.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 8 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.



Question 9. On considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des racines $Z := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ est représenté sur la figure ci-contre. On sait de plus que $f(0,0) > 0$ et $f(1,0) < 0$. Donnez le signe de $f(-1,0)$ et $f(x^*)$. Justifiez vos réponses par une preuve détaillée en veillant à citer les théorèmes que vous utilisez.

/4

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/4

Question 10. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $a \in \mathbb{R}$. Considérons les propositions suivantes :

(a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon$;

(b) $\forall \varepsilon' \geqslant 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0',\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon'$.

Ces deux propositions sont-elles équivalentes ? Justifiez la véracité ou la fausseté de chacune des deux implications par une preuve détaillée ou par un contre exemple explicite.