Analyse mathématique I

Examen (20 août 2008)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /10

(a) Définissez en termes de suites « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ ».

(b) Définissez « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ ».

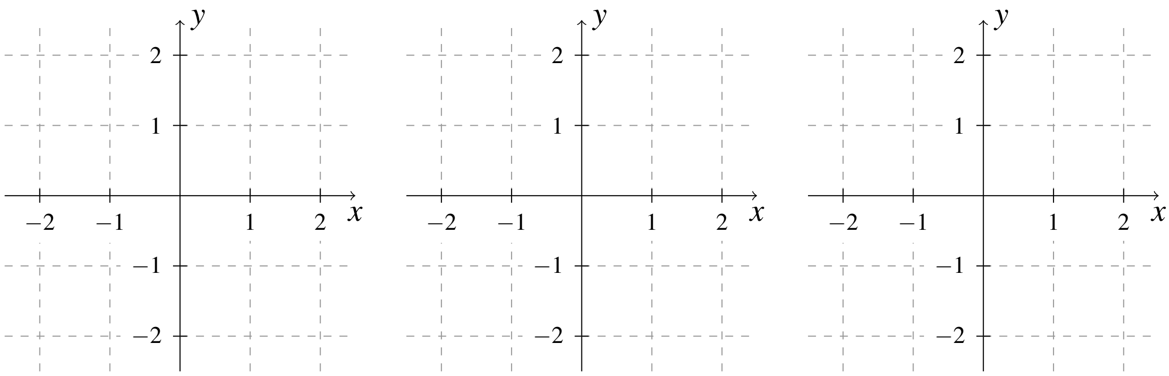
Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} x^2 + \lambda & \text{si } x \leqslant \lambda, \\ (x+\lambda)^2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(c) Esquissez le graphe de f_λ pour $\lambda = -1, \lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

$\lambda = -1$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = 1$



Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite).

(d) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. En particulier, au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (a).

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite).

(e) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ sur $\mathbb{R}$, dites si la fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. En particulier, au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (b).

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2008)

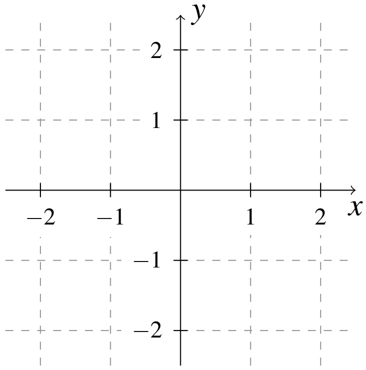
Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Pour chacune des limites suivantes, tracez le domaine de définition de la fonction dont on prend la limite. Calculez la valeur de cette limite, si elle existe. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. $\big/ 6$

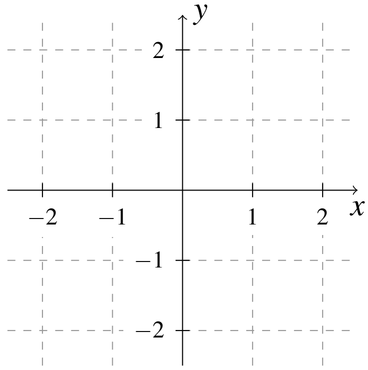
(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^2}{x+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(y-1)(x+1)^3}{(x+1)^2+(y-1)^6}$

Domaine de (a)



Domaine de (b)



Analyse mathématique I

Examen (20 août 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/6

Question 3. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, donnez en une preuve succincte. Sinon, donnez un contre-exemple explicite.

- Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite bornée converge.

- Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite $\big(\cos(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.

- Vrai : ☐ Faux : ☐ Une fonction dérivable est strictement croissante si et seulement si sa dérivée est strictement positive.

- Vrai : ☐ Faux : ☐ L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x \leqslant 1 \text{ et } x\sin(x) \leqslant 2\}$ est compact.

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2008)

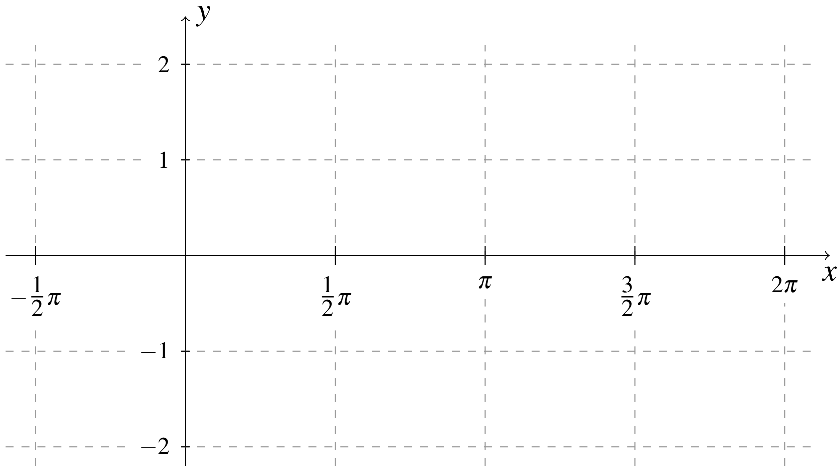
Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Soit l'équation $e^{-2x} = \sin x$. /7

(a) Illustrez par un *graphique commenté* le fait que cette équation possède une unique solution sur $[0, \pi/2]$. Le lien entre le graphique et la question posée doit être explicitement établi.



(b) Montrez (cette fois analytiquement, sans aucune justification graphique) que l'équation $e^{-2x} = \sin x$ possède une et une seule solution sur $[0, \pi/2]$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats utilisés.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/8

Question 5. Donnez une preuve des affirmations suivantes. *Veillez à la précision de vos arguments.* Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

(a) Si (x_n) est une suite non bornée supérieurement, alors (x_n) contient une sous-suite qui converge vers $+\infty$.

(b) Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est une fonction paire, alors il existe $\alpha \in \left]-\pi,\pi\right[$, $\partial f(\alpha) = 0$.

(c) Si (x_n) est une suite qui converge vers $\sqrt{2}$, alors $\exists n_1,\ \forall n \geqslant n_1,\ x_n \in B\big(0, \sqrt{2}+1\big)$.

(d) Si p_1 est le développement de Taylor d'ordre n de f en a et p_2 est le développement de Taylor d'ordre n de g en a, alors $p_1 + p_2$ est le développement de Taylor d'ordre n de $f+g$ en a.

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 6. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = (x-1)\,\frac{\mathrm{e}^{-(x-1)^2}}{1+\sin(x-1)}$$

Étudiez la valeur de la limite suivante $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\cos(x-1)-1}$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 7. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 4u(t) = \cos(t) + e^{2t}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 8. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue arbitraire sur $\mathbb{R}$ et deux réels $a < b$. Considérons les ensembles

$$N := \left\{ x \in \,]a,b[\;\middle|\; f(x) = \inf_{x \in]a,b[} f(x) \right\}$$

/6

et

$$M := \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \right\}$$

(l'infimum et le suprémum sont considérés au sens large).

(a) Peut-on affirmer que N est non-vide ? Que M est non-vide ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

(b) Peut-on affirmer que N est compact ? Que M est compact ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

Analyse mathématique I

Examen

(20 août 2008)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ne seront pas corrigées. Les feuilles où la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /10

(a) Définissez en termes de suites « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ ».

(b) Définissez « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ ».

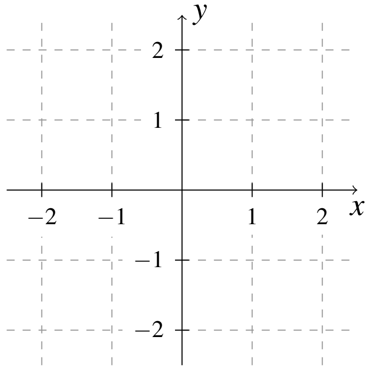
Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} x^2 + \lambda & \text{si } x \leqslant \lambda, \\ (x+\lambda)^2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

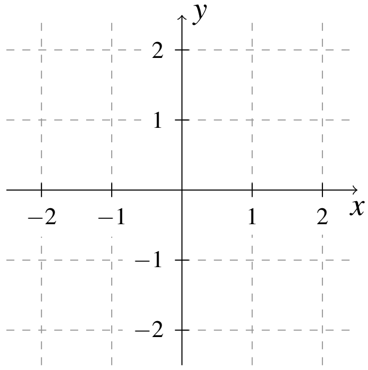
où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(c) Esquissez le graphe de f_λ pour $\lambda = -1, \lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

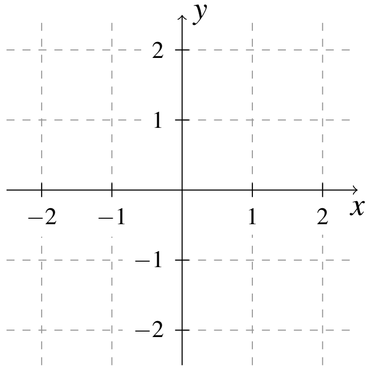
$\lambda = -1$



$\lambda = 0$



$\lambda = 1$



Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 1 (suite).

(d) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, justifiez la continuité de f_λ en tout point de $\mathbb{R}$. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. En particulier, au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (a).

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 1 (suite).

(e) En reprenant chaque valeur de λ pour laquelle vous avez montré la continuité de f_λ sur $\mathbb{R}$, dites si la fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. En particulier, au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (b).

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 2. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Considérons les deux propositions suivantes : /4

(a) $\exists R > 0,\ \forall x \in A,\ B(x,R) \subseteq A$;

(b) $\forall x' \in A,\ \exists R' > 0,\ B(x',R') \subseteq A$.

Ces deux propositions sont-elles équivalentes ? Justifiez la véracité ou la fausseté de chacune des deux implications par une preuve détaillée ou par un contre-exemple explicite.

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2008)

Nom :

Prénom :

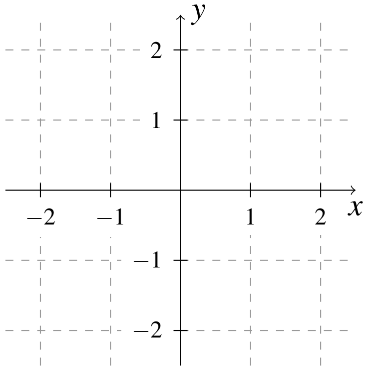
Section : Info / Phys

Question 3. Pour chacune des limites suivantes, tracez le domaine de définition de la fonction dont on prend la limite. Calculez la valeur de cette limite, si elle existe. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /6

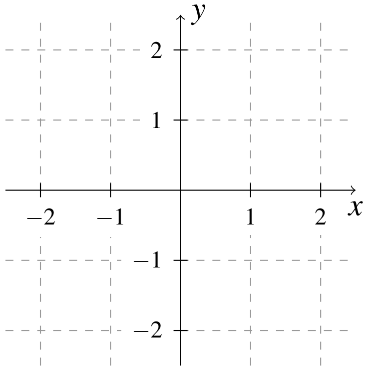
(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^2}{x+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(y-1)(x+1)^3}{(x+1)^2+(y-1)^6}$

Domaine de (a)



Domaine de (b)



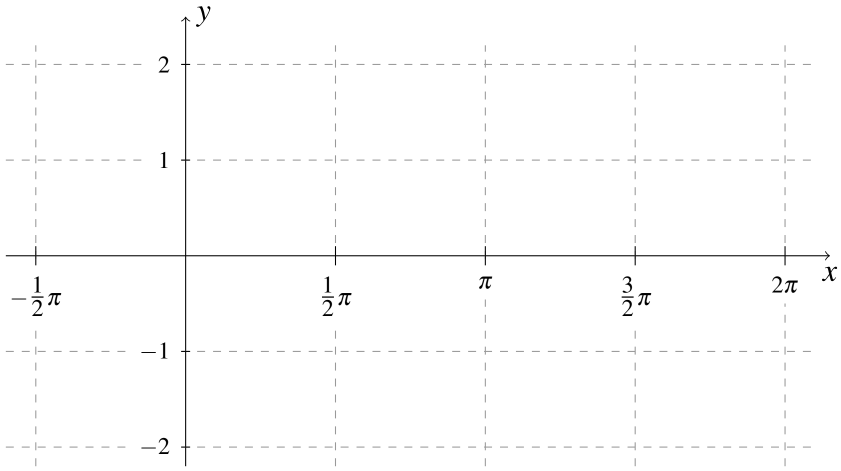
Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : Info / Phys

Question 4. Soit l'équation $e^{-2x} = \sin x$. /7

(a) Illustrez par un *graphique commenté* le fait que cette équation possède une unique solution sur $[0, \pi/2]$. Le lien entre le graphique et la question posée doit être explicitement établi.



(b) Montrez (cette fois analytiquement, sans aucune justification graphique) que l'équation $e^{-2x} = \sin x$ possède une et une seule solution sur $[0, \pi/2]$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats utilisés.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 5. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = x\,\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+\sin x}$$

Étudiez la valeur de la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\cos x - 1}$.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez par une preuve détaillée ou par un contre-exemple explicite.

/6

- Vrai : ☐ Faux : ☐ $\mathrm{o}(x) - \mathrm{o}(x) = 0$

- Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Si $x = 0$, alors $\|x\| = 0$.

- Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Si $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x)$, alors f est continue en a.

- Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, alors f est continue en a.

Analyse mathématique I

Examen (20 août 2008)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/8

Question 7. Donnez une preuve des affirmations suivantes. *Veillez à la précision de vos arguments.* Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

(a) Si (x_n) est une suite non bornée supérieurement, alors (x_n) contient une sous-suite qui converge vers $+\infty$.

(b) Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est une fonction paire, alors il existe $\alpha \in \left]-\pi,\pi\right[$, $\partial f(\alpha) = 0$.

(c) Si (x_n) est une suite qui converge vers $\sqrt{2}$, alors $\exists n_1,\ \forall n \geqslant n_1,\ x_n \in B\big(0, \sqrt{2}+1\big)$.

(d) Si p_1 est le développement de Taylor d'ordre n de f en a et p_2 est le développement de Taylor d'ordre n de g en a, alors $p_1 + p_2$ est le développement de Taylor d'ordre n de $f+g$ en a.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 8. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : $/5$

$$\partial_t^2 u(t) + 4u(t) = \cos(t) + \mathrm{e}^{2t}$$

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 8 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.