Analyse mathématique I

Examen (14 janvier 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom, sans section, ou mal remises ne seront pas corrigées et/ou pénalisées.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$. /5

(a) Définissez, grâce à une formule quantifiée, « (x_n) converge vers $-\infty$ ».

(b) Définissez, grâce à une formule quantifiée, « A est non-borné inférieurement ».

(c) Montrez, à partir des définitions que vous venez de donner, que, A est non-borné inférieurement si et seulement s'il existe une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $x_n \to -\infty$. Veillez à la qualité de votre rédaction.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Montrez qu'on ne peut avoir simultanément $x_n \to \pi$ et $x_n \to -\infty$. $/3$

Analyse mathématique I

Examen (14 janvier 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Calculez la limite au sens large, si elle existe, de chacune des suites définies ci-après. Justifiez vos calculs.

/8

(a) $x_n = \dfrac{-9+(-2)^{n+1}}{n!}\cos n$

(b) $y_n = \dfrac{(-1)^n+\sin n}{(2+\cos n)n}$

(c) $z_n = \left(\dfrac{2n^3+1}{\sqrt[3]{n}(n+1)}\right)^5$

(d) $u_n = 1+\dfrac{(-1)^n n^2}{n+1}$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4.

/7

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $2 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. La qualité de votre rédaction est importante (votre éventuel brouillon ne nous intéresse pas).

(c) Montrez que la définition que vous avez donnée en (a) est équivalente à

$$\forall \varepsilon' \in \,]0,1],\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0',\ |x_n - a| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon'. \tag{1}$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

/8

(a) Définissez « a est le maximum de A ».

(b) Définissez « a est le suprémum de A ».

(c) À partir de la définition donnée en (a), montrez que $\max[-1,3[$ n'existe pas.

(d) À partir des définitions données en (a) et (b), justifiez l'existence ou la non-existence du maximum (resp. du suprémum) pour chacun des ensembles ci-dessous. Lorsque vous affirmez l'existence du maximum (resp. du suprémum), donnez en sa valeur. Détaillez vos calculs.

$$A := \left\{ \frac{4^n}{n!} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \ln x < 0 \right\}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $x_n \to +\infty$, alors $\exists \delta > 0$, $\exists n^* \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n^*$, $x_n \geqslant \delta$. /3

Nom :
Prénom :
Section :

/8

Question 7. Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$x_n = p^{-n} + 1 \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{n^2+n}{n(n^p+1)^3},$$

où p est un paramètre réel. Étudiez la convergence au sens large de ces deux suites en discutant en fonction de p si nécessaire. Veillez à la qualité de vos justifications.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 8. Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que $\inf(A \cap B) \geqslant \sup\{\inf A, \inf B\}$. $/3$

Nom :

Prénom :

Section :

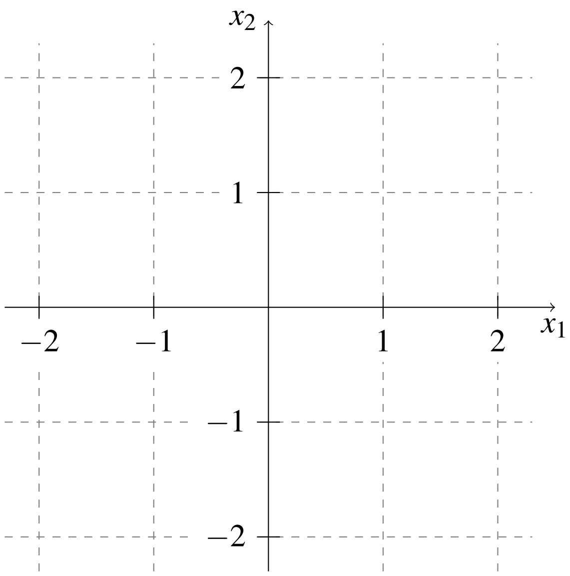
Question 9.

/6

(a) Définissez « $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^N$ défini par $x = (1, 2, \ldots, N)$. Calculer $|x|_1$, $|x|_2$, $|x|_\infty$.

(c) Représentez sur le graphique ci-dessous l'ensemble $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x_1, x_2)|_\infty \leqslant 1\}$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.



Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 10. Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

/8

$$\begin{cases} y_0 \in \,]0,+\infty[\\ y_{n+1} = \sqrt{6+y_n} \end{cases}$$

Étudiez la convergence de cette suite lorsque

(a) $0 < y_0 < 3$

(b) $y_0 = 3$

(c) $y_0 > 3$