Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 5 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Partie A

Question 1. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\sin(x-1)} x^2.$$

Calculez, si elle existe, la valeur de la limite suivante $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$. Justifiez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Mathématique

Question 2. /10

(a) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$.

(b) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

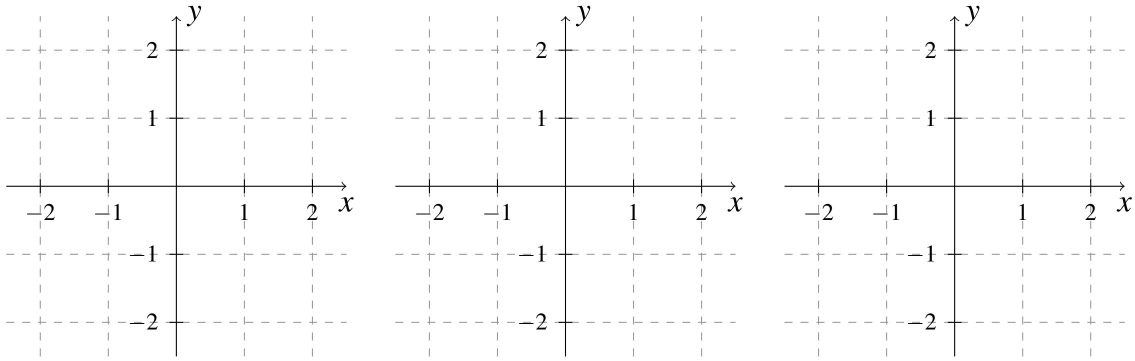
(c) Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^3 - \lambda^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ \lambda\, \mathrm{e}^{x-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(i) Esquissez les graphes de f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

$\lambda = -1$ $\lambda = 0$ $\lambda = 1$



(ii) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien continue sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (a).

(iii) Choisissez une valeur de λ pour laquelle f_λ n'est pas continue. Prouvez la discontinuité de f_λ en utilisant la définition donnée en (a).

(iv) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (b).

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

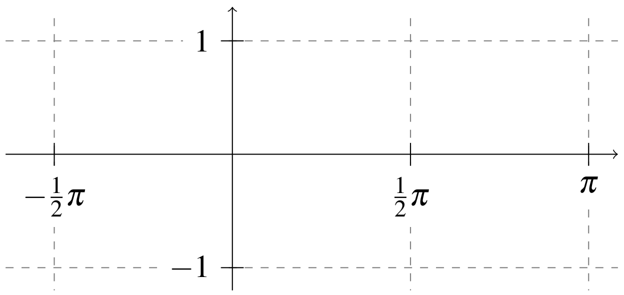
Examen (4 juin 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

/6

Question 3. Soit l'équation $a \ln x = \cos x$ où a est un paramètre réel tel que $|a| \geqslant 1$.

(a) En utilisant un graphique commenté, argumentez le fait que cette équation possède une unique solution sur $[0, \pi/2]$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|a| \geqslant 1$.



(b) Montrez rigoureusement que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \geqslant 1$, l'équation $a \ln x = \cos x$ possède une et une seule solution dans $[0, \pi/2]$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 4. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, donnez en une courte preuve. Sinon, donnez un contre-exemple explicite.

/8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Aucune suite strictement croissante ne converge au sens strict.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe des suites (x_n) et (y_n) telles que $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ et $x_n/y_n \to 1$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute fonction continue sur $A := \left]0,1\right[$ atteint son maximum sur A (c'est-à-dire $\exists y \in A,\ \forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(y)$).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f n'est pas une fonction constante, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_x f(x) \neq 0$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que le développement de Taylor d'ordre 2 de f en $x = 1$ est le polynôme $-5 + 2(x-1) + 4(x-1)^2$. $/3$

- Calculez $f(1), \partial f(1)$ et $\partial^2 f(1)$. Justifiez vos réponses.
- Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f passant par le point $\big(1, f(1)\big)$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : $/5$

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \cos(4t) + t\,\mathrm{e}^t$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 6 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Partie B

Question 7. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. /10

(a) Définissez l'intérieur de A.

(b) Définissez l'adhérence de A.

On dit d'un ensemble $V \subseteq \mathbb{R}^N$ qu'il est un *voisinage* de $x \in \mathbb{R}^N$ s'il existe un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^N$ tel que $x \in \mathscr{O} \subseteq V$. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $x \in \mathbb{R}^N$.

(c) Montrez que $x \in \operatorname{int} A$ si et seulement s'il existe un voisinage V de x tel que $V \subseteq A$.

(d) Montrez que $x \in \operatorname{adh} A$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.

(e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(\pi) = 0{,}1$. Montrez qu'il existe un voisinage V de π sur lequel la fonction f est strictement positive.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 8. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. /7

(a) Définissez « A est ouvert ».

(b) Définissez « A est fermé ».

(c) En utilisant les définitions ci-dessus, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert et/ou fermé.

- $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant y\}$;
- $E_2 = \left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;
- $E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 9. Étudiez la convergence des séries suivantes. Justifiez vos calculs et énoncez les résultats utilisés. /4

(a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{i}^k}{k^3}$ (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-2\boldsymbol{i})^{2n}}{n!} \frac{3^{2n}}{5^n}$

où $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Analyse mathématique I

Examen

(4 juin 2009)

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sur lesquelles la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que le développement de Taylor d'ordre 2 de f en $x = 1$ est le polynôme $-5 + 2(x-1) + 4(x-1)^2$. $/3$

- Calculez $f(1), \partial f(1)$ et $\partial^2 f(1)$. Justifiez vos réponses.
- Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f passant par le point $\big(1, f(1)\big)$.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 2.

/10

(a) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$.

(b) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

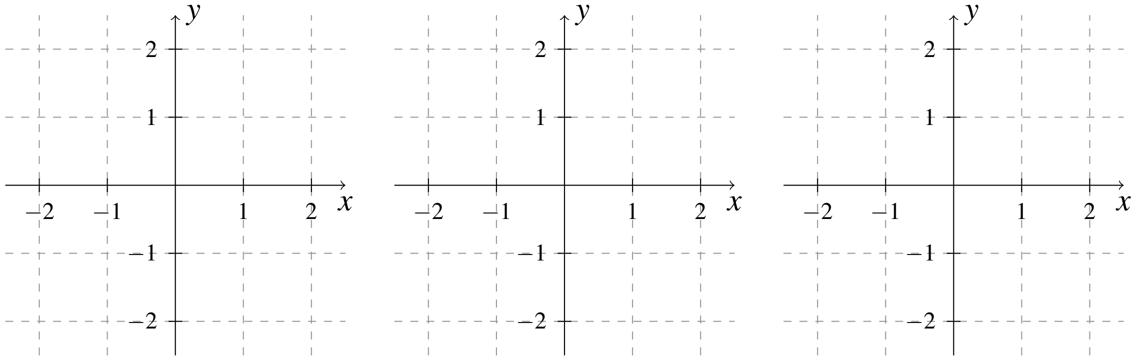
(c) Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^3 - \lambda^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ \lambda\, \mathrm{e}^{x-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(i) Esquissez les graphes de f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

$\lambda = -1$ $\lambda = 0$ $\lambda = 1$



(ii) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien continue sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (a).

(iii) Choisissez une valeur de λ pour laquelle f_λ n'est pas continue. Prouvez la discontinuité de f_λ en utilisant la définition donnée en (a).

(iv) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (b).

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 3. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les définitions et résultats que vous utilisez. /8

- $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ (|a-b| < \varepsilon \Rightarrow a = b)$.

- Si $f \in \mathrm{o}\big((x-42)^3\big)$ et $g \in \mathrm{o}\big((x-42)^5\big)$, alors $f + g \in \mathrm{o}\big((x-42)^3\big)$.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$.

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si elle est bornée inférieurement et supérieurement.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

/6

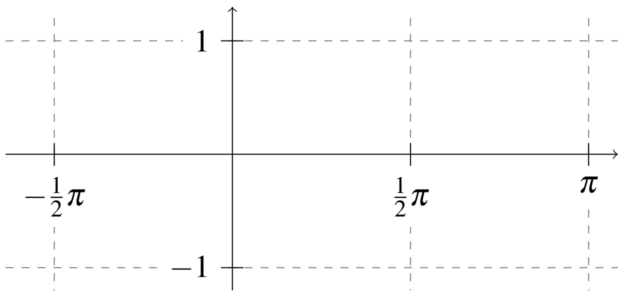
Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Les implications sont-elles vraies ou fausses ?

$$f \text{ est constante sur } \mathbb{R} \quad \underset{\text{(b)}}{\overset{\text{(a)}}{\substack{\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}}} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) = 0.$$

Justifiez vos réponses par une preuve détaillée ou par un contre-exemple explicite. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

Question 5. Soit l'équation $a \ln x = \cos x$ où a est un paramètre réel tel que $|a| \geqslant 1$. /6

(a) En utilisant un graphique commenté, argumentez le fait que cette équation possède une unique solution sur $[0, \pi/2]$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|a| \geqslant 1$.



(b) Montrez rigoureusement que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \geqslant 1$, l'équation $a \ln x = \cos x$ possède une et une seule solution dans $[0, \pi/2]$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/8

Question 6. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, donnez en une courte preuve. Sinon, donnez un contre-exemple explicite.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Aucune suite strictement croissante ne converge au sens strict.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe des suites (x_n) et (y_n) telles que $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ et $x_n/y_n \to 1$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute fonction continue sur $A :=]0,1[$ atteint son maximum sur A (c'est-à-dire $\exists y \in A,\ \forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(y)$).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f n'est pas une fonction constante, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_x f(x) \neq 0$.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 7. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \cos(4t) + t\,\mathrm{e}^t$$

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 7 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (4 juin 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 8. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \operatorname{ch} x \cdot \frac{e^{-\sin x}}{1+x^2}.$$

$/5$

Calculez, si elle existe, la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+x-1}{\operatorname{sh} x - x}$. (Pour rappel : $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ et $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.)