Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 août 2009)

Nom : ______________
Prénom : ______________
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $-7+4(x+2)+3(x+2)^2$ le développement de Taylor d'ordre 2 en -2 d'une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. $/3$

(a) Donnez $f(-2)$, $\partial f(-2)$ et $\partial^2 f(-2)$. Expliquez votre démarche.

(b) Donnez l'équation de la tangente au graphe de f passant par $\big(-2, f(-2)\big)$.

Nom :

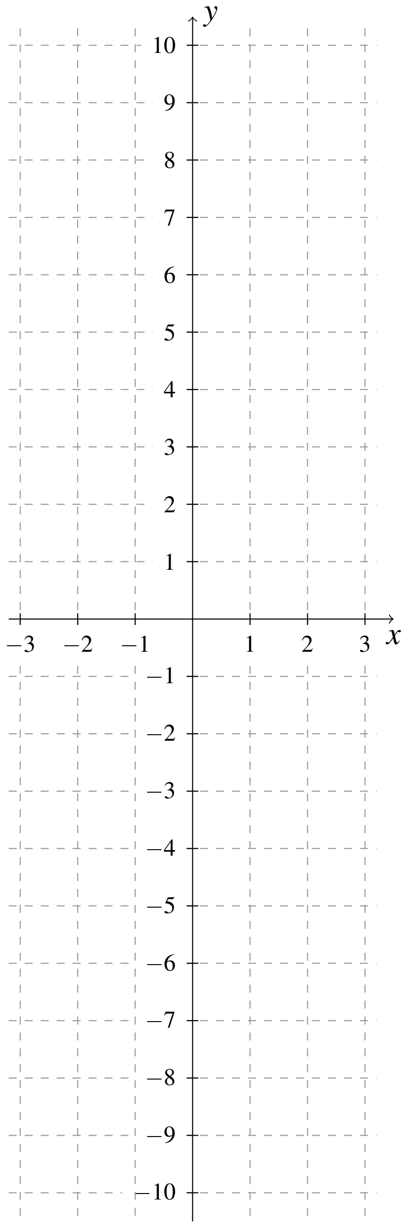
Prénom :

Section : Mathématique

/5

Question 2. Soit l'équation $-x^3 = \mathrm{e}^x$.

(a) Illustrez par un *graphique commenté* le fait que cette équation possède une solution. Le lien entre le graphique et la question posée doit être *explicitement établi*.



(b) Montrez que l'équation $-x^3 = \mathrm{e}^x$ possède une et une seule solution. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats utilisés.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. /10

(a) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ en terme de suites.

(b) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

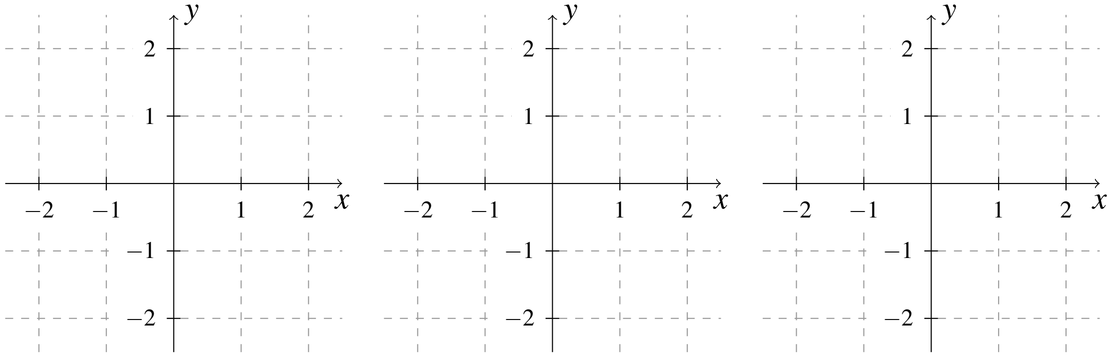
(c) Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} (x-\lambda)^3 & \text{si } x \leqslant 0, \\ e^{\lambda + x} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(i) Esquissez le graphe de f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

$\lambda = -1$ $\qquad$ $\lambda = 0$ $\qquad$ $\lambda = 1$



(ii) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien continue sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (a).

(iii) Choisissez une valeur de λ pour laquelle f_λ n'est pas continue. Prouvez la discontinuité de f_λ en utilisant la définition donnée en (a).

(iv) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (b).

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 août 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

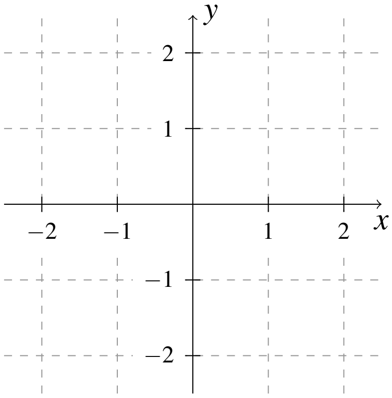
Question 4. Pour chacune des limites suivantes, tracez le domaine de définition de la fonction dont on prend la limite. Calculez la valeur de cette limite, si elle existe. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/6

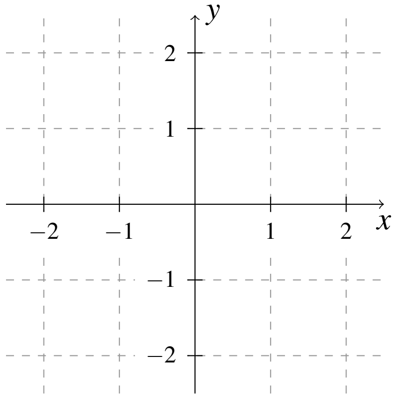
(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^2+(y-1)^2}{(x-1)(y-1)}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{(x+1)^3(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^4}$

Domaine de (a)



Domaine de (b)



Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = x\,\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}}{1 + \operatorname{sh} x}.$$

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 août 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/6

Question 6. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, donnez en une preuve. Sinon, donnez un contre-exemple explicite.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la fonction f est strictement croissante, alors le graphe de f coupe l'axe des x.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est une fonction paire, alors le graphe de f coupe l'axe des x.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la fonction f est strictement croissante, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(x) > 0$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la fonction f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(x) = 0$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \sin(2t) + t\,\mathrm{e}^t$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 7 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (17 août 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. /7

(a) Définissez « A est un ensemble ouvert ».

(b) Définissez « A est un ensemble fermé ».

(c) *À partir des définitions précédentes*, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert et/ou fermé.

- $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant y\}$;
- $E_2 = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$;
- $E_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 + x + 1 < 1\}$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (17 août 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Étudiez la convergence des séries suivantes. Justifiez vos calculs et énonçez les résultats que vous utilisez.

/6

(a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{(2k+1)^5}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4-3i)^n}{(n+1)!} \frac{8^n}{5^n}$

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (17 août 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/10

Question 3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$. Pour rappel, on définit l'image réciproque de A par f comme

$$f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}.$$

(a) Pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$, recherchez l'ensemble $f^{-1}([-1,1])$. Détaillez vos calculs.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que l'ensemble $g^{-1}([\pi,+\infty[)$ est fermé. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. Un argument tel que « on l'a vu au cours » ne suffit pas.

(c) Déduisez du point précédent que l'ensemble $g^{-1}(]-\infty,\pi[)$ est ouvert.

(d) Montrez que si g est une fonction continue et A est un ensemble ouvert, alors $g^{-1}(A)$ est un ensemble ouvert. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen

(17 août 2009)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sur lesquelles la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $-7+4(x+2)+3(x+2)^2$ le développement de Taylor d'ordre 2 en -2 d'une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. /3

(a) Donnez $f(-2)$, $\partial f(-2)$ et $\partial^2 f(-2)$. Expliquez votre démarche.

(b) Donnez l'équation de la tangente au graphe de f passant par $\big(-2, f(-2)\big)$.

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 2. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ solutions de l'équation : $/5$

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \sin(2t) + t\,\mathrm{e}^t$$

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 2 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 3. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = x\,\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}}{1 + \operatorname{sh} x}.$$

Nom :

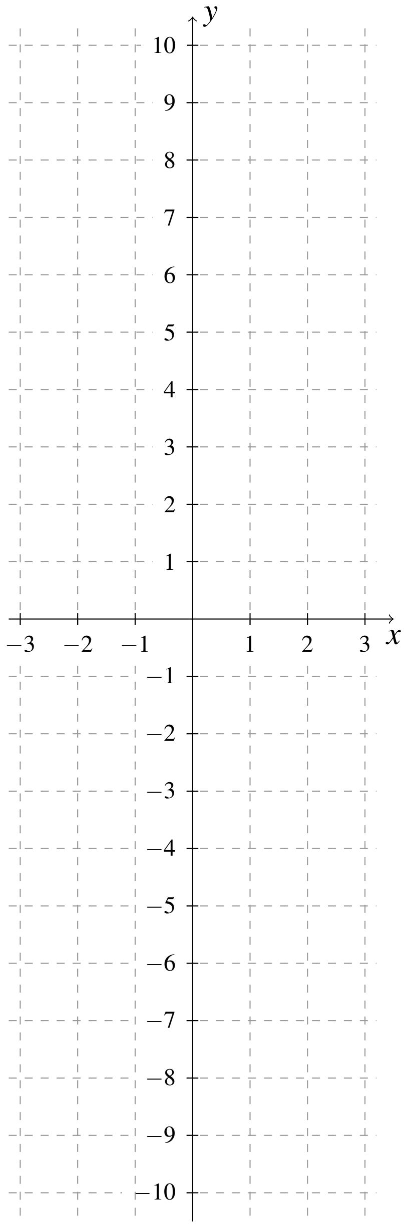
Prénom :

Section : Info / Phys

/5

Question 4. Soit l'équation $-x^3 = \mathrm{e}^x$.

(a) Illustrez par un *graphique commenté* le fait que cette équation possède une solution. Le lien entre le graphique et la question posée doit être *explicitement établi*.



(b) Montrez que l'équation $-x^3 = \mathrm{e}^x$ possède une et une seule solution. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats utilisés.

Analyse mathématique I

Examen (17 août 2009)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 5. /10

(a) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ en terme de suites.

(b) Définissez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

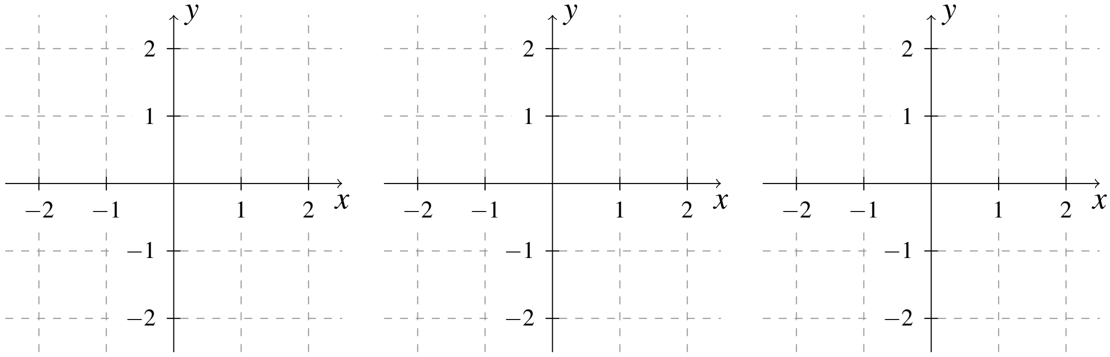
(c) Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} (x-\lambda)^3 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{\lambda+x} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(i) Esquissez le graphe de f_λ pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

$\lambda = -1$ $\lambda = 0$ $\lambda = 1$



(ii) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien continue sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (a).

(iii) Choisissez une valeur de λ pour laquelle f_λ n'est pas continue. Prouvez la discontinuité de f_λ en utilisant la définition donnée en (a).

(iv) Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Expliquez votre démarche. Pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez que la fonction f_λ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. Au moins une justification doit utiliser la définition donnée en (b).

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

Question 5 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (17 août 2009)

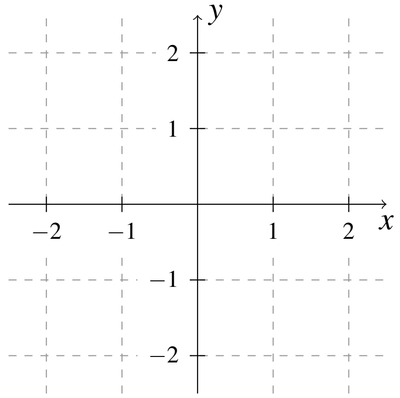
Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 6. Pour chacune des limites suivantes, tracez le domaine de définition de la fonction dont on prend la limite. Calculez la valeur de cette limite, si elle existe. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /6

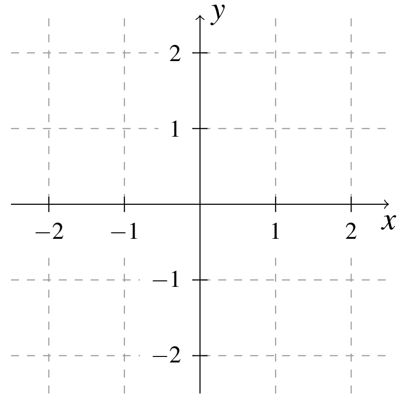
(a) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{(x-1)(y-1)}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)^3(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^4}$

Domaine de (a)



Domaine de (b)



Analyse mathématique I

Examen (17 août 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Info / Phys

Question 7. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, donnez en une preuve. Sinon, donnez un contre-exemple explicite.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la fonction f est strictement croissante, alors le graphe de f coupe l'axe des x.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est une fonction paire, alors le graphe de f coupe l'axe des x.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la fonction f est strictement croissante, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(x) > 0$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la fonction f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(x) = 0$.