Analyse mathématique I

Examen (13 janvier 2010)

Nom : ______________
Prénom : ____________
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Rappelons qu'une condition suffisante pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ est /4

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall n \in \mathbb{N}^{>0}, \quad |x_n - a| \leqslant \frac{C}{n^\alpha}. \tag{1}$$

(a) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ».

(b) A-t-on que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1) avec $a = 0$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ? Justifiez par une démonstration ou un contre-exemple en utilisant les définitions ci-dessus .

(c) A-t-on que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Justifiez vos calculs.

/8

(a) $2-\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$

(b) $\left(-\dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2}\right)^5$

(c) $\dfrac{5+(-3)^{n+2}}{2n!}\sin n$

(d) $\dfrac{n^2+1}{n+3}(-1)^n$

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 2 (suite). Continuez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 3. /3

- Définissez « $a \in \mathbb{R}$ est le minimum de $A \subseteq \mathbb{R}$ ».

- Montrez, en utilisant la définition donnée au point précédent, que $\min \mathbb{R}$ n'existe pas.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Une condition suffisante pour qu'une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ est

/6

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \xi_n \geqslant n + a. \tag{2}$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Montrez que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (2), alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n := x_{n+2010}$ vérifie elle aussi (2).

(b) Montrez que, si $(x_{n+2010})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (2), alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie également (2).

Veillez à justifier les différentes étapes de vos raisonnements.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5.

/5

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Donnez la définition en « ε, n », de « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) Montrez , en utilisant la définition donnée ci-dessus, que la suite $1 + \frac{2}{3n^2+1}$ converge vers 1. Veillez à une rédaction concise mais de qualité.

(c) Montrez de manière détaillée que la définition donnée ci-dessus est équivalente à

$$\forall \varepsilon' \in \left]0,2\right],\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0' + 1, \quad |x_n - a| \leqslant 2\varepsilon'.$$

Analyse mathématique I

Examen (13 janvier 2010)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/3

Question 6. Soit la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_m = \frac{-\sqrt{2m}+1}{(m^{1/3}+p)^p}$$

où p est un paramètre réel. Étudiez, en discutant au besoin en fonction du paramètre p, la convergence au sens large de la suite.

Analyse mathématique I

Examen (13 janvier 2010)

Nom :

Prénom :

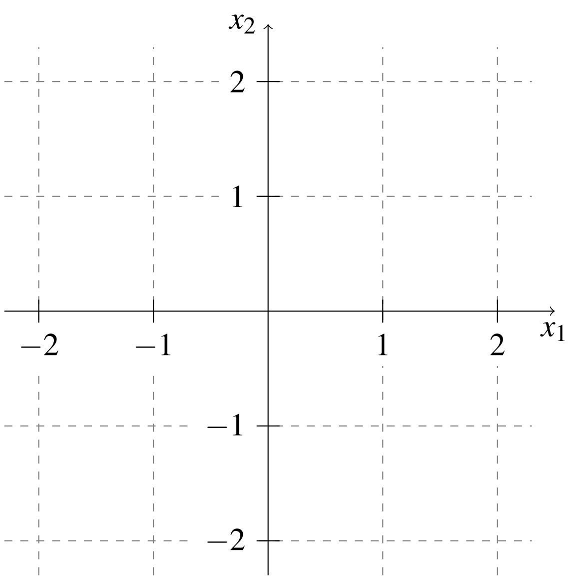
Section : Mathématique

Question 7. /5

(a) Définissez « $\|\_\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Soit $x = (1, -4, -7)$. Calculez $|x|_1$, $|x|_2$ et $|x|_\infty$.

(c) Représentez l'ensemble $E := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x_1, x_2)|_1 \leqslant 2\}$ en détaillant les calculs nécessaires.



Analyse mathématique I

Examen (13 janvier 2010)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 8. $/5$

(a) Définissez « $a \in \mathbb{R}$ est l'infimum de $A \subseteq \mathbb{R}$ ».

(b) Calculez $\inf\{(-1)^n(1-\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^{>0}\}$. Justifiez votre réponse en utilisant la définition donnée au point (a).

(c) Montrez, à partir de la définition donnée au point (a), que $\inf\{(-1)^n(1-n) \mid n \in \mathbb{N}^{>0}\} \notin \mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 9. Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $y_0 = 3$ et, pour tout $n > 0$, $y_n = \sqrt{3y_{n-1} - 2}$. Étudiez la convergence au sens large de cette suite. Justifiez votre réponse. /6

Analyse mathématique I

Examen (13 janvier 2010)

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom et ENTOURER la section adéquate sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sur lesquelles la section n'est pas sélectionnée seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Rappelons qu'une condition suffisante pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ est /4

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall n \in \mathbb{N}^{>0},\quad |x_n - a| \leqslant \frac{C}{n^\alpha}\,. \tag{1}$$

(a) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ».

(b) A-t-on que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1) avec $a = 0$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ? Justifiez par une démonstration ou un contre-exemple en utilisant les définitions ci-dessus .

(c) A-t-on que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

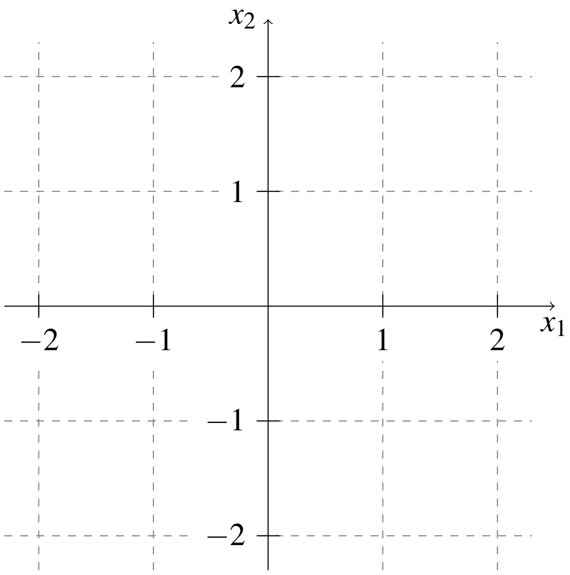
Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 2. $/5$

(a) Définissez « $\|\_\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ ».

(b) Soit $x = (1, -4, -7)$. Calculez $|x|_1$, $|x|_2$ et $|x|_\infty$.

(c) Représentez l'ensemble $E := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x_1, x_2)|_1 \leqslant 2\}$ en détaillant les calculs nécessaires.



Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 3. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Justifiez vos calculs. /8

(a) $2 - \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$

(b) $\left(-\dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2}\right)^5$

(c) $\dfrac{5+(-3)^{n+2}}{2n!}\sin n$

(d) $\dfrac{n^2+1}{n+3}\,(-1)^n$

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 3 (suite). Continuez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Question 4. $/3$

- Définissez « $a \in \mathbb{R}$ est le minimum de $A \subseteq \mathbb{R}$ ».

- Montrez, en utilisant la définition donnée au point précédent, que $\min \mathbb{R}$ n'existe pas.

Analyse mathématique I

Examen (13 janvier 2010)

Nom :

Prénom :

Section : Info / Phys

/3

Question 5. Soit la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_m = \frac{-\sqrt{2m}+1}{(m^{1/3}+p)^p}$$

où p est un paramètre réel. Étudiez, en discutant au besoin en fonction du paramètre p, la convergence au sens large de la suite.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

/6

Question 6. Une condition suffisante pour qu'une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ est

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \xi_n \geqslant n + a. \tag{2}$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Montrez que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (2), alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n := x_{n+2010}$ vérifie elle aussi (2).

(b) Montrez que, si $(x_{n+2010})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (2), alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie également (2).

Veillez à justifier les différentes étapes de vos raisonnements.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 7. Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $y_0 = 3$ et, pour tout $n > 0$, $y_n = \sqrt{3y_{n-1} - 2}$. Étudiez la convergence au sens large de cette suite. Justifiez votre réponse. /6

Analyse mathématique I

Examen (13 janvier 2010)

Nom :	
Prénom :	
Section : Info / Phys	

Question 8. $/5$

(a) Définissez « $a \in \mathbb{R}$ est l'infimum de $A \subseteq \mathbb{R}$ ».

(b) Calculez $\inf\left\{(-1)^n(1-\frac{1}{n}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^{>0}\right\}$. Justifiez votre réponse en utilisant la définition donnée au point (a).

(c) Montrez, à partir de la définition donnée au point (a), que $\inf\left\{(-1)^n(1-n) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^{>0}\right\} \notin \mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section : Info / Phys

Question 9. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrez, en utilisant la définition donnée à la question 8 (a), qu'on a

$$\inf(A \cap B) \geqslant \max\{\inf A, \inf B\}.$$

À l'aide d'un contre-exemple, prouvez qu'on n'a *pas nécessairement* l'égalité. /4