Analyse mathématique I

Examen (3 juin 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en termes de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = \cos(2x) \cdot \left(1 - \frac{e^{\operatorname{sh} x}}{1-4x}\right).$$

Calculez, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + 5x - \frac{1}{2}x^2}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

(On rappelle que $\operatorname{sh} x := (e^x - e^{-x})/2$ et $\operatorname{ch} x := (e^x + e^{-x})/2$.)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ qui sont solutions de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 25u(t) = \sin(5t) + (t-2)\,\mathrm{e}^{-5t}\,.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soient $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et p un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Montrez que p est le développement de Taylor d'ordre n de f en a *si et seulement si* $\forall i = 0,\dots,n$, $\partial^i p(a) = \partial^i f(a)$.

/5

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. /4

(a) Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique. Vous devez faire *explicitement* le lien entre l'énoncé et le graphique.

(b) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Montrez que si f n'est pas constante, alors il existe nécessairement au moins un $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(\gamma) \neq 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

/8

(a) Soient $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Montrez que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists R > 0,\ A \subseteq B_{\|\cdot\|}[0,R]$;

(ii) $\exists R' > 0,\ A \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,R')$.

(b) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles tels que $A \subseteq B$. Montrez que $\inf A \geqslant \inf B$. Énoncez les définitions et les propriétés que vous utilisez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite).

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

(d) Montrez que $f(x) = \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$ si et seulement si $f(x) = (x-a)^n \cdot \mathrm{o}(1)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Montrez que la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/5

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0, \\ \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} & \text{si } t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

est solution de l'équation $\partial_t u(t) = \big(u(t)\big)^{1/3}$. Rappelez ce que cela signifie et argumentez *en détail* votre réponse.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Prouvez que la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x \ln x - \alpha$, où $\alpha \geqslant 0$ est un paramètre réel, possède une et une seule racine. Argumentez de manière détaillée votre réponse et expliquez clairement votre utilisation de résultats du cours (un graphique est le bienvenu mais n'est pas une justification suffisante). /6

Nom :

Prénom :

Section :

Cette question n'est obligatoire que si vous avez fait une note < 10 au coté de mars.

/5

Question 8. Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels définie par morceaux :

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ est divisible par 3 ou 7,} \\ b_n & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de réels convergeant vers $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ respectivement. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Prouvez vos affirmations en veillant à justifier en détail chacune de vos étapes.