Analyse mathématique I

Examen (16 août 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez une preuve des affirmations suivantes. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. $/8$

(a) Montrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'appartient pas à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 1 (suite).

(b) Montrez que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$.

(c) Soient $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $r > s$. Montrez que si $f(x) = \mathrm{o}(x^r)$, alors $f(x) = \mathrm{o}(x^s)$.

(d) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que $\sup A = -\inf(-A)$ où, pour rappel, $-A = \{-a \mid a \in A\}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2.

/5

(a) Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires et donnez-en une interprétation géométrique. Le lien entre l'énoncé et le graphique doit être explicitement fait.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) A-t-on $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$?

(c) A-t-on $f(]a,b[) \supseteq]f(a), f(b)[$?

Justifiez vos réponses par une preuve ou un contre exemple.

Analyse mathématique I

Examen (16 août 2010)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soit $-4+2(x+1)+4(x+1)^2$ le développement de Taylor d'ordre 2 en -1 d'une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. /3

(a) Donnez $f(-1)$, $\partial_x f(-1)$ et $\partial_x^2 f(-1)$.

(b) Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f passant par $\big(-1, f(-1)\big)$.

Justifiez vos réponses.

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 4. Montrez que la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0, \\ \left(\frac{4}{5}t\right)^{4/3} & \text{si } t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

est solution de l'équation $2\partial_t u(t) = \frac{32}{15}\,|u(t)|^{1/4}$. Rappelez ce que cela signifie et argumentez *en détail* votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soient $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et p un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Montrez que p est le développement de Taylor d'ordre n de f en a *si et seulement si* $\forall i = 0, \dots, n$, $\partial^i p(a) = \partial^i f(a)$. La qualité de votre justification est importante. /5

Analyse mathématique I

Examen (16 août 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 6. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, donnez une preuve. Sinon, donnez un contre-exemple explicite.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute fonction périodique possède un point critique, c'est-à-dire un point en lequel sa dérivée est nulle.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute fonction continue est dérivable.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite $\left(\dfrac{n}{(42n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall a \in \mathbb{R},\ (\forall \delta > 0,\ |a| \leqslant \delta) \Rightarrow a = 0.$

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 7. Calculez, si elles existent,

(a) $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)^4+(y-1)^4}{(x-2)^2+(y-1)^4}$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{(x+2)^4(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^8}$$

Détaillez et justifiez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 8. On considère la fonction

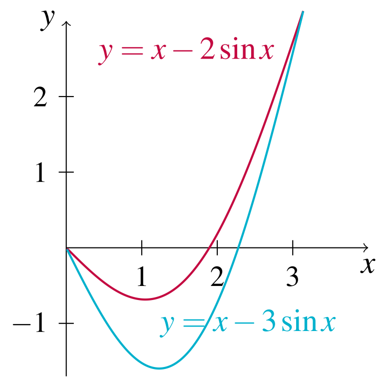
$$f :]0, \pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto x - \alpha \sin x,$$

où $\alpha > 1$ est un paramètre réel.

(a) Prouvez que f possède une et une seule racine lorsque $\alpha = 3$.

(b) Prouvez que l'affirmation du point précédent reste vraie quel que soit $\alpha > 1$.

Argumentez de manière détaillée votre réponse et expliquez clairement votre utilisation des résultats du cours. (Le graphique ci-contre est donné pour vous aider mais le simple fait de « voir » n'est pas une justification !)



Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ qui sont solutions de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \cos(3t) + (t-3)\,\mathrm{e}^{-3t}\,.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.