Analyse mathématique I

Examen (6 juin 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/\sqrt{x}$ et $a \in \mathbb{R}^{>0}$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue en a. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit l'équation $a\mathrm{e}^x = \cos x$ où $0 < a < 1$.

/5

(a) En utlisant un graphique *commenté*, argumentez le fait que cette équation possède une unique solution dans $]0, \pi/2[$ quel que soit $a \in]0,1[$.

(b) Montrez rigoureusement le fait ci-dessus. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés.

Analyse mathématique I

Examen (6 juin 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3.

/6

(a) Montrez que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$.

(b) Soient $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une norme et $a \in \mathbb{R}^N$. Montrez que $\|\cdot\|$ est continue en a.

(c) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe un $C > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = C|x|$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/5

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \lambda x, & \text{si } x < 0, \\ (1+x)^2, & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Justifiez *en détail* toutes vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, donnez en une preuve. Sinon, donnez en un contre-exemple explicite. /10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\mathrm{o}(x) - \mathrm{o}(x) = 0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{|x|}$ appartient à l'ensemble $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f n'est pas une fonction constante, alors il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(x_0) \neq 0$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in \mathbb{R}$. Alors il existe forcément un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 6. Dans chacun des cas suivants, donnez, si possible, une fonction qui satisfait les conditions données. N'oubliez pas de justifier vos réponses !

(a) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont les trois premiers termes du développement de Taylor d'ordre 42 en 0 sont $1 + x + x^2$.

(b) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique (de période $P > 0$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$ avec un reste exprimé en termes de petit-o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = \cos(x-1)\bigl(1 - \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x-1)}\bigr).$$

(Pour rappel : $\operatorname{sh} x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$.) Calculez, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + x - 1}{(x-1)^2}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ qui sont solutions de l'équation

/5

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \sin(4t) + (t-4)\,\mathrm{e}^{-4t}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.