Analyse mathématique I

Examen (22 août 2011)

Nom : ______________
Prénom : ______________
Section : ______________

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x^3$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrez que f est continue en a en montrant (directement) que la définition de continuité en ε-δ de f est satisfaite. $/6$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2.

/8

(a) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles arbitraires tels que $A \subseteq B$. Montrez que $\sup A \leqslant \sup B$. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\big[f(a), f(b)\big] \subseteq f\big([a,b]\big)$. Énoncez les résultats que vous utilisez.

(c) Montrez que $\mathrm{o}\big((x-42)^3\big) + \mathrm{o}\big((x-42)^5\big) = \mathrm{o}\big((x-42)^3\big)$.

(d) Soient $x \in \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Montrez que si $x = 0$, alors $\|x\| = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soient les fonctions $f : [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 + x\sqrt{1-x^2}$ et $g : [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{x/2}$. /6

(a) f et g sont-elles continues sur $[-1,1]$? Dérivables sur $]-1,1[$?

(b) Montrez que 0 est racine de $f - g$.

(c) Montrez que $\partial f(0) > \partial g(0)$.

(d) Déduisez en qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f(\varepsilon) > g(\varepsilon)$.

(e) Montrez qu'il existe un $x > 0$ tel que $f(x) = g(x)$.

(f) Existe-il une autre racine strictement positive de $f - g$?

Veillez à la qualité de vos justifications.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$f \text{ est strictement décroissante } \underset{(b)}{\overset{(a)}{\substack{\Rightarrow \\ \Leftarrow}}} \ \forall x\in\mathbb{R},\ \partial f(x) < 0.$$

Justifiez vos réponses par une preuve *détaillée* ou par un contre-exemple *explicite*. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs réelles. On suppose que f est continue et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrez que f est bornée. Veuillez rappeler les énoncés des théorèmes que vous utilisez. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 6. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$ avec un reste exprimé en termes de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\operatorname{sh}(x-1)}$$

De plus, calculez, si elle existe, la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}.$$

Détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$/5$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < 0, \\ e^{\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Esquissez le graphe de f_λ pour $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ et $\lambda = -2$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f_λ est-elle continue ? Expliquez votre démarche et justifiez en les différentes étapes. En particulier, pour la ou les valeurs de λ trouvées, montrez explicitement que f_λ est continue.

(c) Même question que la précédente avec « continue » remplacé par « dérivable ».

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 8. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation

$$\partial^2 u + 16u = \sin(4t) + \mathrm{e}^t \,.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.