Analyse mathématique I

Examen (24 janvier 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. /3

- Définissez « a est le supremum de A ».

- Montrez que si a_1 et a_2 vérifient tous deux la définition de supremum ci-dessus, alors $a_1 = a_2$.

Analyse mathématique I

Examen (24 janvier 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /10

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n^3+1}{n-42}$

(b) $y_n = 5 - \dfrac{n \cdot \cos n^2}{(n+8)^4}$

(c) $z_n = \dfrac{n^2}{n - \sin\sqrt{n}}$

(d) $v_n = \dfrac{(-7)^{n+2}}{(n-1)!}$

(e) $u_n = \dfrac{n^{2/5}+n^{1/3}}{\sqrt{n}+1}$

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 3. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels.

(a) Définissez « (x_n) converge vers $-\infty$ ».

(b) Définissez « (x_n) est bornée supérieurement ».

(c) À partir des définitions que vous venez de donner, montrez que si (x_n) converge vers $-\infty$ alors (x_n) est bornée supérieurement. Aucun résultat vu au cours ne peut être utilisé sans preuve.

Analyse mathématique I

Examen (24 janvier 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Donnez une preuve des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments. Veuillez énoncer clairement les définitions et les résultats que vous utilisez.

/8

(a) Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$. On ne peut pas avoir simultanément que (x_n) converge vers π et (x_n) converge vers $+\infty$.

(c) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $a \in \mathbb{R}$. Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $|x_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |a|$.

(d) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels qui convergent vers $+\infty$. Montrez que $x_n + y_n \to +\infty$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

/4

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \text{ (fixé)}, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3), \text{ pour } n > 0. \end{cases}$$

(a) Montrez que la suite $y_n = x_n - 3$ est une suite géométrique.

(b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, quelle en est la limite ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Analyse mathématique I

Examen (24 janvier 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. /6

(a) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « (x_n) converge vers a ».

(b) Montrez que la définition donnée au point précédent est équivalente à :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0', \quad |x_n - a| < \frac{1}{k}.$$

(c) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $3 - \dfrac{2^{n-1}}{5^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/8

Question 7. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

(a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.

(b) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 \geqslant 2$.

(c) Montrez que la suite (x_n) est décroissante.

(d) En supposant que la suite (x_n) converge, déterminez la limite de cette suite. Expliquez et justifiez votre démarche. Détaillez vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/6

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On définit l'ensemble $E := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant x - 2\}$.

(a) Sans faire la résolution demandée en (b), dites si oui ou non $-1 \in E$. Justifiez votre réponse.

(b) Écrivez l'ensemble E sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est). Détaillez vos calculs.