Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x^2$. En utilisant la définition en ε-δ (donc sans faire appel aux théorèmes du cours sur les limites), montrez que f est continue en 1. $/4$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = a$. Donnez les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des x. Expliquez votre démarche. /4

Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2012)

Nom :

Prénom :

Section :

/10

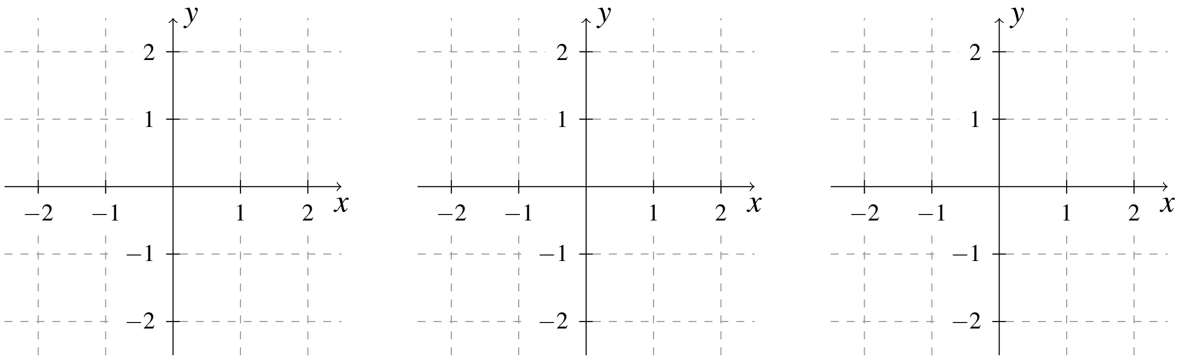
Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 1, \\ (x+\lambda)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Tracez le graphe de f pour $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

$\lambda = -1$ $\lambda = 0$ $\lambda = 1$



(b) Étudiez la continuité de f en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Vos réponses aussi bien positives que négatives doivent être justifiées.

(c) Étudiez la dérivabilité de f en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4.

/5

(a) Énoncez le théorème de Rolle et donnez-en une interprétation géométrique. Vous devez faire *explicitement* le lien entre l'énoncé et le graphique et justifier celui-ci.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrez que si f est périodique, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\partial f(\alpha) = 0$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez par une preuve ou en donnant un contre-exemple *explicite*.

/4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Alors il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, alors f est continue en a.

Analyse mathématique I

Examen (9 juin 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

/8

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < 0$, alors $1/x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

(b) On a $\dfrac{\mathrm{o}(x)}{1+\mathrm{o}(x)} = \mathrm{o}(x)$.

(c) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que $\inf A = -\sup(-A)$ où, pour rappel, $-A := \{x \mid \exists a \in A,\ x = -a\}$.

(d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie sur tout $\mathbb{R}$), on considère la propriété suivante : /4

$$(\mathscr{P}_f) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \sin\big(f(x)\big) = 0.$$

(a) Donnez un exemple de fonction f qui vérifie $(\mathscr{P}_f)$.

(b) Montrez que si f est une fonction *continue* qui vérifie $(\mathscr{P}_f)$, alors f est constante (sur $\mathbb{R}$).

(c) Montrez que l'implication du point précédent est fausse si on ne demande pas que f soit continue.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 8. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en termes de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{1+\sin x}.$$

Calculez, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+3x-1}{\ln(1+x)-x}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation : /4

$$\partial_t^2 u(t) + u(t) = \cos(t) + t\,\mathrm{e}^t \,.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.