Analyse mathématique I

Examen (27 août 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. En utilisant la définition en ε-δ (donc sans faire appel aux théorèmes du cours sur les limites), montrez que f est continue en 2. $/5$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez la limite suivante, en justifiant vos calculs : $\lim_{x\to\pi/2}(1-\sin x)\operatorname{tg} x$ /3

Question 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction (pas nécessairement continue) telle que $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. Montrez qu'il existe un unique $\xi \in [0,1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes : /3

(a) $\forall x \in [0,\xi[,\ f(x) > 0$;

(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in [\xi,\xi+\varepsilon],\ f(x) \leqslant 0$.

Justifiez vos affirmations.

Analyse mathématique I

Examen (27 août 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/6

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses par une preuve détaillée ou par un contre-exemple explicite. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ f est strictement croissante $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) \neq 0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) > 0$ $\Rightarrow$ f est strictement croissante.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ f est strictement croissante $\Rightarrow$ f coupe l'axe des x en un seul point.

Analyse mathématique I

Examen (27 août 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \operatorname{arctg}(x-1)$. $\diagup 5$

(a) Montrez que f possède au moins une racine.

(b) Montrez que cette racine est unique.

Argumentez de manière détaillée votre réponse en expliquant clairement votre utilisation des résultats du cours.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Donnez une preuve de chacune des affirmations suivantes. Veillez à la précision de vos arguments et énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

/8

(a) Si p_1 est le développement de Taylor d'ordre n de f_1 en a et p_2 est le développement de Taylor d'ordre n de f_2 en a, alors $p_1 + p_2$ est le développement de Taylor d'ordre n de $f_1 + f_2$ en a.

(b) Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite).

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^N$.

(d) $\inf\{n^2 - 2n + 6 \mid n \in \mathbb{N}\} \neq 1$.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 7. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 1$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{sh}(x-1)}.$$

Calculez la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x}{\sin^3(x-1)}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

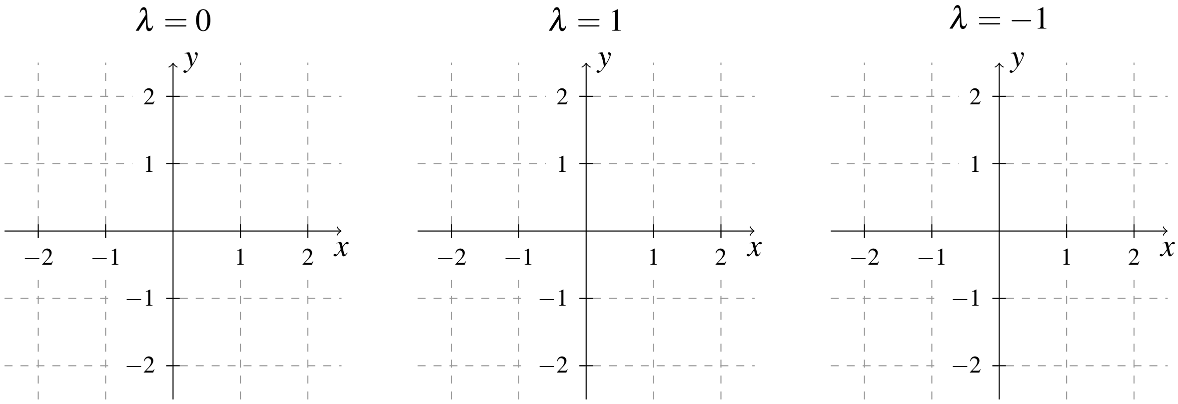
/6

Question 8. Soit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^2 - \lambda, & \text{si } x < 0, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Esquissez le graphe de f_λ pour $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.



(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle continue ? Expliquez votre démarche et justifiez avec soin ses différentes étapes. La qualité de votre justification est importante.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction f_λ est-elle dérivable ? Expliquez votre démarche et justifiez avec soin ses différentes étapes. La qualité de votre justification est importante.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (27 août 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Donnez toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ qui sont les solutions de l'équation $\partial_t^2 u + 25u = \cos(5t) + 5\,\mathrm{e}^{2t}$. Détaillez vos calculs.

/4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.