Analyse mathématique I

Examen (14 janvier 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. $/5$

- Définissez « a est l'infimum de A » et « a est le maximum de A ».

- Calculez l'infimum et le maximum des ensembles suivants (expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez) :

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \log|x| < 0\} \quad \text{et} \quad A_2 := \{\log(x) \mid 0 < x < 2\}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/10

- $u_n = -\dfrac{n \sin n}{n + \sin n}$
- $w_n = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}\sqrt{n}}{-2n+2}$
- $y_n = \dfrac{(-2)^{2n}}{(2n+1)!}$
- $v_n = -4 - \dfrac{\sqrt{n}\sin\sqrt{n}}{n + \cos n}$
- $x_n = \dfrac{2n^{1/4} - 3n^{3/7}}{2 - \sqrt{n}}$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (14 janvier 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et $a \in \mathbb{R}$. /12

(a) Définissez $x_n \to a$.

(b) Définissez $x_n \to -\infty$.

(c) Définissez (x_n) est bornée inférieurement.

(d) En utilisant les définitions données, montrez que $-1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to -1$.

(e) En utilisant les définitions données, montrez que $(-1)^n - \sqrt{n} \to -\infty$.

(f) En utilisant les définitions données, montrez que si (x_n) est bornée inférieurement alors (x_n) ne converge *pas* vers $-\infty$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I

Examen (14 janvier 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante : /6

$$\begin{cases} u_0 = 6, \\ u_{n+1} = \sqrt{9u_n - 20}. \end{cases}$$

(a) Résolvez, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\sqrt{9x-20} \leqslant x$.

(b) Déterminez si oui ou non la suite (u_n) est croissante et/ou décroissante. (Indice : utilisez le point précédent.)

(c) À partir des deux points précédents, dites si oui ou non la suite (u_n) converge.

(d) Si (u_n) converge, donnez la valeur de sa limite. Si non, donnez la limite d'une sous-suite de votre choix.

Toutes vos affirmations doivent être prouvées.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_n = \frac{-n^{k-1}+2n}{(1+n^2)(n+\mathrm{e})(n-\sqrt{3})^2}$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Donnez toutes[1] les valeurs de k pour lesquelles la suite converge vers un réel. Pour chacun de ces k, donnez la valeur de la limite.

[1] Vous devez bien entendu justifier qu'il n'y a pas d'autre k que ceux que vous donnez.

Analyse mathématique I

Examen (14 janvier 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une preuve ou un contre-exemple est demandé comme justification. Considérons une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un $a \in \mathbb{R}$. /8

(a) Les expressions quantifiées

$$\forall\, R \geqslant 0,\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0, \quad |u_m - a| \leqslant R \tag{1}$$

et

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad u_n = a \tag{2}$$

sont équivalentes.

(b) Les expressions quantifiées

$$\forall R \geqslant 0,\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0, \quad u_m \geqslant R \tag{3}$$

et

$$\forall R \in [2, +\infty[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0, \quad u_n \geqslant R \tag{4}$$

sont équivalentes.

(c) Toute suite strictement croissante converge au sens large.

(d) Il existe au moins une suite qui converge dans $\mathbb{R}$ et qui n'est pas bornée.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.