Analyse mathématique I (partie A)

Examen (31 mai 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. /8

(a) Définissez « $\max A$ existe ».

(b) Définissez « $\sup A$ existe ».

(c) À partir des définitions données en (a) et (b), justifiez l'existence ou la non-existence du maximum (resp. du suprémum) pour chacun des ensembles ci-dessous. Lorsque vous affirmez l'existence du maximum (resp. du suprémum), veuillez calculer sa valeur. Justifiez vos calculs.

$$A := \left\{1 + \frac{4^n}{n!} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \qquad B := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -x^2 + 4x + 1 > 1\right\}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Montrez que les deux affirmations suivantes à propos d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ sont équivalentes. /4

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists x \in A, \quad x \leqslant R \tag{1}$$

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, \quad x_n \to -\infty \tag{2}$$

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (31 mai 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /6

- $u_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n+(-1)^{n+1}}$
- $v_n = \dfrac{n\cos(n!)}{n^2+1}$
- $w_n = \dfrac{n+(-2)^n}{n!}(\sin n)$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et $a \in \mathbb{R}$. /12

(a) Définissez « $x_n \to a$ ».

(b) Définissez « $x_n \to +\infty$ ».

(c) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{4n+1}{2n-3} \to 2$.

(d) Montrez que la définition donnée en (a) est équivalente à

$$\forall \varepsilon_1 \in \left]0, \frac{1}{4}\right[, \ \exists n_1 \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_1, \ |x_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

(e) En utilisant les définitions données, montrez que si $x_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n > 0$, alors $\dfrac{1}{x_n} \to +\infty$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (31 mai 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit $x_0 \in [1, +\infty[$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant à x_0 par la récurrence /6

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}.$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnez la valeur de sa limite. Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/12

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par un bref argument ou un contre-exemple. *Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.*

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite de nombres positifs converge vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $A \subseteq \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, alors $\min(\lambda A) = \lambda \min A$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite n'est pas bornée inférieurement, alors elle converge vers $-\infty$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite).

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de rationnels converge dans $\mathbb{R}$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite bornée est convergente.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés supérieurement. Considérons l'ensemble $A+B = \{a+b \,|\, a \in A \text{ et } b \in B\}$. Alors $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$.