Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 juin 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit l'équation $\lambda\, e^x = \cos x$ où λ est un paramètre réel tel que $0 < \lambda < 1$. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ quel que soit $\lambda \in]0,1[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x^2$. En utilisant la définition en ε-δ (donc sans faire appel aux théorèmes du cours sur les limites), montrez que f est continue sur son domaine de définition.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 juin 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{|x|} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est-elle dérivable sur son domaine de définition ? Si la fonction n'est pas dérivable sur son domaine, donnez les points en lequels elle est dérivable et les points en lesquels elle ne l'est pas. Veillez à donner des justifications complètes de vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = 2\,\mathrm{ch}\left(\mathrm{e}^{\sin x/(1+x^2)} - 1\right)$$

Déduisez-en la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - x^2}{1 + x - \sin x}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 juin 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \lambda & \text{si } x \leqslant -1, \\ \lambda\, \mathrm{e}^{x+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Justifiez *en détail* toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\partial f(x) > 0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit A, B deux ensembles tels que $A \subseteq B$. Alors $\inf A \geqslant \inf B$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le développement de Taylor en 1 d'ordre 2 est $1 - 4x + x^2$. Une équation cartéseinne de la tangente au graphe de f au point $(1, f(1))$ est $y = 1 - 4x$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 juin 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 7. Donnez une preuve des affirmations suivantes. Votre raisonnement doit clairement mentionner les définitions et les résultats que vous utilisez.

(a) $f(x) = \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$ si et seulement si $f(x) = (x-a)^n \cdot \mathrm{o}(1)$.

(b) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in \mathbb{R}$. Alors il existe forcément un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 juin 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. /6

(a) Définissez $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

(b) Définissez $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

(c) Montrer que l'on ne peut pas avoir en même temps $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 juin 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et borné supérieurement et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue. Montrer que $f(\sup A) = \sup f(A)$. /6