Analyse mathématique I (partie A)

Examen (16 août 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une preuve ou un contre-exemple est demandé comme justification. /8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ est une suite qui converge vers $a \neq 0$ et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ est une suite bornée qui ne converge pas au sens large alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n := x_n/y_n$ ne converge pas.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ une suite de nombres naturels. Si (x_n) converge vers $a \in \mathbb{N}$ alors (x_n) est ultimement constante.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$. Si (x_n) est décroissante et bornée inférieurement alors (x_n) converge vers 0.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles. On a $\sup(A\cap B) \geqslant \min\{\sup A, \sup B\}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/8

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez et justifiez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

- $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n + 1}{-n^2 + n + 1}$
- $w_n = 1 + (-1)^n \left(\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)^2$
- $v_n = \dfrac{\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n+1}}{2 + \sin n}$
- $x_n = \dfrac{n+1}{n(2+\sin n)}$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_n = \frac{-n^2 + (n+2)^{2k+1}}{(n+1)^2\left(n-\frac{4}{3}\right)^k}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Donnez toutes[1] les valeurs de k pour lesquelles la suite converge vers un réel. Pour chacun de ces k, donnez la valeur de la limite.

[1]Vous devez donc aussi justifier qu'il n'y a pas d'autres k que ceux que vous donnez.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

/7

(a) Définissez $\sup A$ et $\inf A$.

(b) Soit $B \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que $\sup A = \inf B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ |x - y| < \varepsilon$.

(c) À partir de la définition donnée en (a), justifiez l'existence ou la non-existence de l'infimum et du suprémum pour chacun des ensembles ci-dessous. Lorsque vous affirmez l'existence de l'infimum (resp. du suprémum), veuillez calculer sa valeur. Justifiez vos calculs.

$$A := \left\{ \frac{1}{n} + \sin\frac{n\pi}{3} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \qquad B := \left\{ \sqrt{2n} - \sqrt{n+2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (16 août 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et $a \in \mathbb{R}$.

/7

(a) Définissez $x_n \to a$.

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{1+7^{n+1}}{8^{n-2}} \to 0$.

(c) Montrez que la définition donnée en (a) est équivalente à

$$\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_1,\ |x_n - a| \leqslant \frac{1}{p^2+p}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (16 août 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Montrez que les deux affirmations suivantes sont équivalentes. Veillez à la qualité de votre rédaction. /4

$$\exists C \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant C \tag{1}$$

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2 \tag{2}$$