Analyse mathématique I (partie B)

Examen (21 août 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $/8$

$$f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x} - x^2$$

(a) Calculez $f(0)$, $\partial_x f(0)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Esquissez le graphe de f.

(c) Prouvez que f admet un maximum. Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (21 août 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin\left(e^{x/(1-\cos x)} - 1\right).$$

/5

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ \big||x| - 1\big| & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant la définition en ε-δ (donc sans faire appel aux théorèmes du cours sur les limites), montrez que f est continue sur son domaine de définition. Veillez à la qualité de votre rédaction.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (21 août 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

/9

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$. On a $\inf(A \cap B) = \max\{\inf A, \inf B\}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ appartient à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a,b]$, $\big(f(x)\big)^2 = 1$. Alors $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 1$ ou $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = -1$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f admet un maximum local, alors f admet un maximum global.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si f est paire alors ∂f est impaire[1].

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ bornés supérieurement, alors $A \cup B$ est un ensemble borné supérieurement.

[1] Rappel : On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. On dit qu'elle est est impaire si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (21 août 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Donnez une preuve des affirmations suivantes. Votre raisonnement doit clairement mentionner les définitions et les résultats que vous utilisez. /6

(a) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = g(0)$ et $\forall x \in\,]0,1[,\ \partial_x f(x) < \partial_x g(x)$. Alors $\forall x \in\,]0,1],\ f(x) < g(x)$.

(b) $\dfrac{o(x^2)+o(x^3)}{o(x)+1} = o(x^2)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Prouvez qu'alors f est une fonction constante.

/5