# Analyse mathématique I (A)

## Examen (22 janvier 2014)

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : | |

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles sans nom ou sans section seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

---

**Question 1.** Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. /7

- Définissez « $a$ est le suprémum de $A$ ».

- Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\big(\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ x \leqslant y\big) \ \Rightarrow\ \sup A \leqslant \sup B$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite).

- Calculez, quand ils existent, l'infimum et le maximum des ensembles suivants (expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez) :

$$Q := \{x \in [0, 2\pi] \mid \cos x \leqslant \sin x\} \quad \text{et} \quad R := \{4(-1)^n + n^2 - 4n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (22 janvier 2014)

| |
|---|
| Nom : |
| Prénom : |
| Section : |

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/10

- $u_n = \dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
- $w_n = \dfrac{n + (-1)^n (n^2 - 1)}{2n^2 + 1}$
- $y_n = \pi + \dfrac{n \sin(n!)}{2^n + 1}$
- $v_n = \dfrac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$
- $x_n = \dfrac{n + \sin\sqrt{n}}{n^2 - \cos n}$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. /7

(a) Soient $(x_n)_{n \in I} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n \in I}$ converge vers $a$ ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\frac{2n+1}{3n-3} \to \frac{2}{3}$. La qualité de votre rédaction est importante.

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : | |

Question 3 (suite).

(c) Montrez que la définition que vous avez donnée en (a) est équivalente à

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0',\ |x_n - a| \leqslant \frac{1}{2^p} \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section :

/5

**Question 4.** Soit $x_0 \in [3, +\infty[$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant à $x_0$ par la récurrence

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 2} + 1.$$

Montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge. Donnez la valeur de sa limite. Structurez bien votre raisonnement et justifiez en les différentes étapes.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

/3

Question 5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_n = \frac{(\sqrt[3]{n} + \sqrt{n})^p}{n + p^2}$$

où $p \in \mathbb{Z}$. Donnez toutes[1] les valeurs de $p$ pour lesquelles la suite converge vers un réel. Pour chacun de ces $p$, donnez la valeur de la limite. Justifiez vos affirmations.

[1] Vous devez bien entendu justifier qu'il n'y a pas d'autre valeurs de $p$ que celles que vous donnez.

Nom :

Prénom :

Section :

**Question 6.** Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

/12

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite qui converge vers $-\infty$ est ultimement décroissante.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell$, alors la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ n'est pas bornée.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite décroissante converge au sens large.

| Nom : |
| --- |
| Prénom : |
| Section : |

Question 6 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On a $\sup(A) = -\inf(-A)$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent au sens strict. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent au sens strict.

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\sup A = a$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $a - \varepsilon = x$.