Analyse mathématique I (B)

Examen (3 mai 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules vos NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justifications dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition. $/4$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation : /4

$$9\partial_t^2 u(t) + 4u(t) = \cos(6t) + t\,\mathrm{e}^{2\mathbf{i}t/3}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Étudiez la convergence des séries suivantes. Justifiez vos calculs et identifiez clairement les résultats utilisés. /4

(a) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2-4\mathbf{i})^3(n-10)}{3^n(n^2+3)}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)+\sin(n^2)}{n^5 \cdot 2^{n+1}}$$

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 mai 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \exp\left(\operatorname{sh}\left(\frac{\cos(x)}{1-3x^2} - 1\right)\right).$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez.

Nom :

Prénom :

Section :

/8

Question 5. On considère l'application $f : [0,+\infty[\setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1[, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}+1 & \text{si } x \in]1,4[, \\ \frac{1}{4}x^2 - \lambda & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur son domaine de définition. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur son domaine de définition.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 mai 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable et telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1[,\ \partial f(x) \neq 0$. Montrez que soit on a $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant 0$, soit on a $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant 0$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez. /4

Question 7. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ continue, dérivable et telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\partial f(0) = -1$. Montrez qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = 0$. /3

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 mai 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

/8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ On a $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\big(o((x-a)^n)\big)^m = o\big((x-a)^{nm}\big)$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une application $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $f \notin \mathscr{C}^3(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est une application dont la dérivée s'annule en $a \in \mathbb{R}$, alors a est un extremum de f.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dont le développement de Taylor en 1 d'ordre 2 est $2+5x+3x^2$, alors une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point $(1, f(1))$ est $y = 2+5x$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (3 mai 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$. Montrez que si $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et $\forall x \in]a,b[,\ \partial^2 f(x) > 0$ alors la fonction f admet exactement une racine sur $[a,b]$.

/5