Analyse mathématique I (B)

Examen

(30 mai 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules vos NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justifications dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que $\lim_{x\to 0}\left(1 + x\,\cos\frac{1}{x}\right) = 1$. /3

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation :

/4

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = t^2\, \mathrm{e}^{4t}\,.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Étudiez la convergence des séries suivantes. Justifiez vos calculs et identifiez clairement les résultats utilisés. /4

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4+\cos^2(i)}{i^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\mathbf{i}-1)^n}{1+3^n\cdot\mathbf{i}}$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Calculez le développement de Taylor d'ordre 4 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \operatorname{ch}\bigl(e^{x^2} \cos x - 1\bigr).$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. Calculez ensuite $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x^4}$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (30 mai 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. On considère l'application $f :]-\infty, 1[\cup]1, 4] \to \mathbb{R}$ définie par :

/8

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{x^2}{2}) & \text{si } x \in]-\infty, 1[, \\ x^3 & \text{si } x \in]1, 2[, \\ \lambda x^2 + 9 & \text{si } x \in [2, 4], \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur son domaine de définition. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur son domaine de définition.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. On considère l'équation $\mathrm{e}^{-x} x^{1/3} = -1$. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution. Veillez à détailler et à justifier toutes les étapes de votre raisonnement. /4

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (30 mai 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Montrez que si $\forall x \in]0,1[,\ 0 \leqslant \partial f(x) \leqslant 1$ et $f(0) = 0$ alors $\forall x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1]$. $/3$

Question 8. Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$. Montrez que si $\forall x \in]a,b[,\ \partial^2 f(x) \geqslant 0$ et $f(a) = f(b) = 0$ alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant 0$. $/4$

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (30 mai 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

/8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ On a $\forall n, m \in \mathbb{N},\ o\big((x-a)^n\big) \cdot o\big((x-a)^m\big) = o\big((x-a)^{n+m}\big)$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Considérons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $|x_n| \leqslant y_n$ et $y_n \to 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application, $a \in \mathbb{R}$ et $V = \left]\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right[$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in V}} f(x)$ existent (ou non) simultanément et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in V}} f(x)$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f est une application de domaine $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ à valeurs réelles telle que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \partial f(x) < 0$ alors f est décroissante sur son domaine.

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 10. Considèrons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t x(t) = x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

(a) Déterminez si les fonctions u et v sont solutions de l'équation (1) où u et v sont définies par :

$$u(t) = \cos(t), \qquad v(t) = \sin(t).$$

(b) Montrez qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ est solution de l'équation (1).

(c) Montrez que la somme de deux solutions de l'équation (1) est toujours une solution de l'équation (1).

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.