Analyse mathématique I (A)

Examen (13 juin 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /10

- $u_n = \dfrac{1+n\cos n^3}{n^2+1}$
- $w_n = 2 + \dfrac{2^n \mathrm{e}^{-n}}{(-1)^n n}$
- $y_n = \left(\dfrac{2n+1}{\sqrt{n}-3}\right)^2$
- $v_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n^2+n}}{2-(-1)^{n+3}n}$
- $x_n = \dfrac{n+2}{n}\cos(n\pi)$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. /8

(a) Définissez « a est le suprémum de A ».

(b) Définissez « a est l'infimum de A ».

(c) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non vides et bornés. On définit l'ensemble $A - B = \{a - b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrez, à partir des définitions données en (a)–(b), que

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

(d) Calculez, quand ils existent, l'infimum et le maximum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{ \frac{1}{x^2} \;\middle|\; x \in\,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\right\} \quad \text{et} \quad B := \left\{ \frac{2n}{3n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2 (suite).

(d) Poursuivez votre réponse sur cette page.

(e) Soit $c \in \mathbb{R}$. On définit l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant c\}$. Calculez, s'ils existent, $\sup E$ et $\max E$ en discutant en fonction de c si nécessaire.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (13 juin 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3.

/7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in I} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in I}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{2n+\sin n}{n} \to 2$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Montrez que la définition que vous avez donnée en (a) est équivalente à

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists n'_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n'_0 + 1, \quad a - \varepsilon'/2 < x_n < a + \varepsilon'/4. \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Soit $x_0 \in]0,1]$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant à x_0 par la récurrence /5

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{x_n^2}{4}.$$

(a) Déterminez si la suite (x_n) est croissante et/ou décroissante.

(b) Dites si la suite (x_n) converge au sens large en discutant au besoin en fonction de x_0.

(c) Si (x_n) converge, donnez la valeur de sa limite. Si non, donnez la limite d'une sous-suite de votre choix.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (13 juin 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple. /7

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\exists n^* \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n^*$, $x_n > 1$ et $x_n \to a$. Alors $a \geqslant 1$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ non majorée. Alors $x_n \to +\infty$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \leqslant x_n$. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ croissante qui n'est pas bornée supérieurement. Alors $x_n \to +\infty$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite de rationnels converge dans $\mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 6. Soit la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$x_n = \frac{b\left(n^a + n^b\right)}{\sqrt{n} + an^2},$$

où a et b sont des paramètres réels. Déterminez toutes les valeurs de a et b telles que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers π. Justifiez votre réponse et énoncez les résultats que vous utilisez. En particulier, le fait qu'il n'y ait pas d'autres valeurs que celles que vous donnez doit être justifié.