Analyse mathématique I (B)

Examen

(29 août 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules vos NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justifications dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2}{|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que $f(x)$ converge quand $x \to 0$. La qualité de votre rédaction est importante. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation :

/4

$$\partial_t^3 u(t) + 4\partial_t^2 u(t) = \cos(t).$$

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (29 août 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Étudiez la convergence des séries suivantes. Justifiez vos calculs et identifiez clairement les résultats utilisés. /4

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{(1+\mathbf{i})^{2n}\cdot n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^n(\frac{\pi}{7})}{3^{n+2}}$

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 4. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{e^{2x}}{1+4x} - 1\right).$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

/8

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}$ est un paramètre. On définit les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &:= \{\alpha \in \mathbb{N} \mid f_\alpha \text{ est continue sur son domaine de définition}\}, \\ B &:= \{\alpha \in \mathbb{N} \mid f_\alpha \text{ est dérivable sur son domaine de définition}\}, \\ C &:= \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \partial_x f_\alpha \text{ existe et est continue}\}. \end{aligned}$$

(a) Montrez que $A \supseteq B \supseteq C$ sans donner explicitement les ensembles.

(b) Déterminez explicitement les ensembles A, B et C.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/7

Question 6. On considère l'équation $\lambda\,\mathrm{e}^{-x} = \sin(x)$ où λ est un paramètre réel tel que $0 < \lambda < 1$. Quel que soit $\lambda \in \,]0,1[$, montrez rigoureusement que cette équation :

(a) possède une unique solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$;

(b) possède une unique solution dans $]\frac{\pi}{2}, \pi[$;

(c) ne possède pas de solution dans $]\pi, 2\pi[$.

Veillez à détailler et à justifier toutes les étapes de votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 7. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour rappel, cela signifie que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que ∂f est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 0$.

(a) Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, on ait $\partial f(x) > 0$. Montrez qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq mx$.

(b) En supposant que pour tout $x \in]0,1[$, $\partial f(x) > 0$, la conclusion du point (a) peut-elle toujours être déduite ?

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (29 août 2014)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ On a $\big(1+\ o(x)\big)^2 = 1+\ o(x)$ quand $x \to 0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si f et g deux applications de domaine $\mathbb{R}$ à valeurs réelles sont continues en a alors $f \circ g$ est continue en a.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local, alors f admet un minimum global.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ est une fonction paire, alors il existe $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right[$ tel que $\partial f(\alpha) = 0$.